

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 13 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון ..... (ללא ספר)
2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים ..... 1
3. בעיות קיצון בהנדסת המישור ..... 2
4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים ..... 4
5. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון ..... 6
6. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני ..... 12

## בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

### שאלות

- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (2) מצא את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.  
 א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?  
 ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?  
 ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (4)  $x$  ו- $y$  הם שני מספרים המקיימים:  $x + 6y = 60$ .  
 א. הבע את  $y$  באמצעות  $x$ .  
 ב. מה צריכים להיות המספרים  $x$  ו- $y$ , כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?  
 ג. מהי המכפלה הני"ל?

### תשובות סופיות

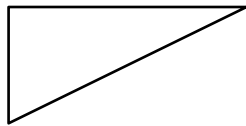
- (1) 8,8,8
- (2) 1
- (3) א. 12, 12, 12      ב. 8, 12, 16      ג. מקרה א'.
- (4) א.  $y = 10 - \frac{x}{6}$       ב.  $x = 30, y = 5$       ג.  $M = 22500$

## בעיות קיצון בהנדסת המישור

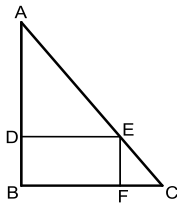
### שאלות



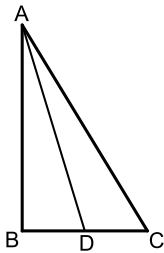
- 1) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר, ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



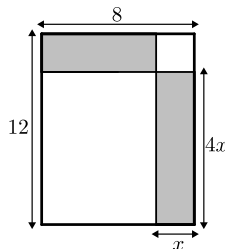
- 2) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



- 3) במשולש ישר זווית ABC ( $\angle B = 90^\circ$ ) הנקודה E נמצאת על היתר AC, כך שהמרובע EDBF הוא מלבן. נתון:  $AB = 20$  ס"מ,  $BC = 16$  ס"מ. מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



- 4) במשולש ישר הזווית ABC ( $\angle B = 90^\circ$ ), AD הוא תיכון לניצב BC. ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצא מה צריכים להיות אורכי הניצבים, עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



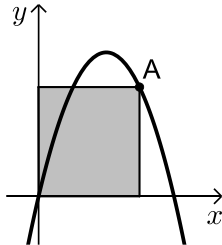
- 5) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של  $x$  ו- $4x$  על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים. מצא את  $x$  עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.

**תשובות סופיות**

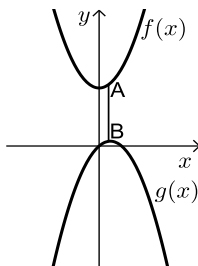
- (1) 4.6
- (2) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ    ב. 18 סמ"ר    ג.  $6\sqrt{2} \approx 8.48$  ס"מ.
- (3) 80 סמ"ר = S.
- (4) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
- (5)  $x = 2.75$

## בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

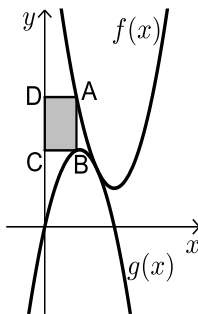
### שאלות



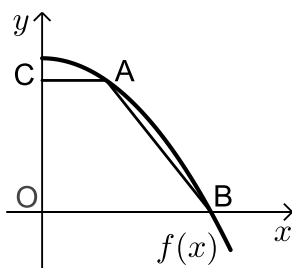
- (1) נתונה הפונקציה  $f(x) = 6x - x^2$ . מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



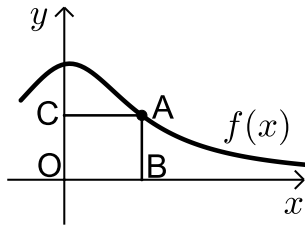
- (2) נתונות הפונקציות:  $f(x) = x^2 + 12$  ו-  $g(x) = 2x - x^2$  כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות:  $f(x)$  ו-  $g(x)$ , כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



- (3) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = x^2 - 8x + 18$  ו-  $g(x) = -x^2 + 4x$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$ , כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- $y$  כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .  
 א. הבע באמצעות  $t$  את שטח המלבן המסומן.  
 ב. מצא את ערכו של  $t$  עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.  
 ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



- (4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 36 - x^2$ . על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- $x$ , שחותך את ציר ה- $y$  בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  ו- $O$  ראשית הצירים.  
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?  
 ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

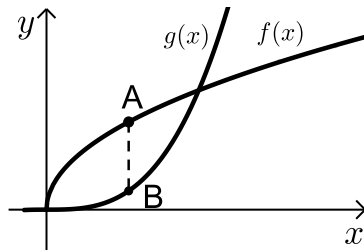


(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$ , בתחום  $x \geq 0$ .

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



(6) נתונות הפונקציות  $f(x) = 2\sqrt{x}$  ו-  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$ .

את הנקודה A שעל  $f(x)$  חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

### תשובות סופיות

(1) A(4,8)

(2) A(0.5,12.25)

(3) א.  $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$  ב.  $t = 1$  ג.  $S = 8$

(4) א. A(2,32) ב.  $S = 128$

(5) א. A(2,2) ב. A(0,4)

(6) A(1,2)

## שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- $x$ .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות  $x$ .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- $x$ .
- נוודא שערך ה- $x$  מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "  $y$  (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

## בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

### שאלות

- 1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת  $x$  ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של  $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$  שקל לליטר.
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
  - מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
  - מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
  - שרטט את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצא את תחום ההגדרה שלה.
  - פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנה את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.
- 2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא  $p(x) = -0.6x + 120$ .
- מצא את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
  - אם  $x = 20$ , מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
  - אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?
- 3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא  $R(x) = -0.08x^2 + 40x$ .
- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
  - שרטט את הגרף של פונקציית הפדיון.
  - מצא את פונקציית הביקוש ושרטט את הגרף שלה.
- 4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא  $p(x) = -0.4x + 100$ .
- מצא את תחום הפונקציה.
  - מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
  - מצא את פונקציית הפדיון השולי.
  - לאיזה ערך של  $x$  יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?
- 5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא  $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$ .
- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
  - אם  $x = 40$ , האם כדאי להגדיל את הייצור?
  - מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י  $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$ .

- א. מצא את המחיר, הנותן את הפדיון המקסימלי.  
 ב. מהו הביקוש במקרה זה?  
 ג. מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאת? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר  $x$  קפה ביום, היא  $C(x) = 5x + 150$ .

- א. שרטט גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?  
 ב. מצא כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.  
 ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?  
 ד. מצא את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא  $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$  שקל ליום.

- א. חשב את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.  
 ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?  
 ג. חשב את העלות השולית ליום, עבור  $x = 100$ . איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא  $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$ .

- א. חשב את העלות, כאשר  $x = 100$  וכאשר  $x = 101$ .  
 ב. חשב את העלות השולית, כאשר  $x = 100$ .  
 ג. חשב כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$  ל- $x = 101$ , והשווה עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?  
 ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש  $P(Q) = 100 - 0.06Q$ ,

ופונקציית עלות כוללת  $TC(Q) = 200 + 4Q$ .

- מהי הכמות,  $Q$ , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?  
 מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש  $P(Q) = 20$ ,

ופונקציית עלות  $TC(Q) = 300 + 2Q^2$ .

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?  
 מהו המקסימום במקרה זה?

**12** ליצרן פונקציית ביקוש  $P(Q) = -0.15Q + 50$ ,  
 ופונקציית עלות שולית  $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$ .  
 מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

**13** ליצרן פונקציית ביקוש  $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$ ,  
 ופונקציית עלות  $TC(Q) = 200 + 4Q$ .  
 מהי הכמות,  $Q$ , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?  
 מהו המקסימום במקרה זה?

**14** ליצרן פונקציית עלות שולית  $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$ .  
 מצא את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא  $Q = 10$ ,  
 אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

**15** ענה על הסעיפים הבאים:  
 א. הוכח שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.  
 ב. הוכח שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה שולית שווה למחיר המוצר.

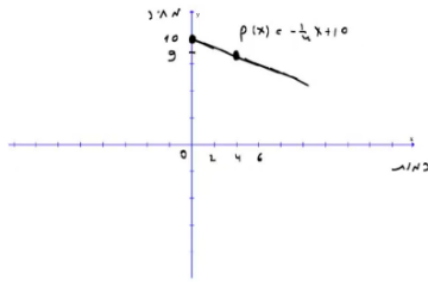
**16**  $C(x)$  – פונקציית הוצאות,  $C'(x)$  – הוצאות שוליות,  $\frac{C(x)}{x}$  – הוצאות ממוצעות.  
 א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?  
 ב. האם ייתכן להפך?  
 ג. הוכח, כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

**17** מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור.  
 נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- $p_1$  וב- $p_2$ , בהתאמה.  
 אם משתמשים ב- $x$  יחידות מג"י אחד וב- $y$  יחידות מג"י 2,  
 המפעל מייצר  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  יחידות. תקציב המפעל  $A$  ₪.  
 א. הוכח, כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\text{כאשר מתקיימת הנוסחה: } \frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}$$

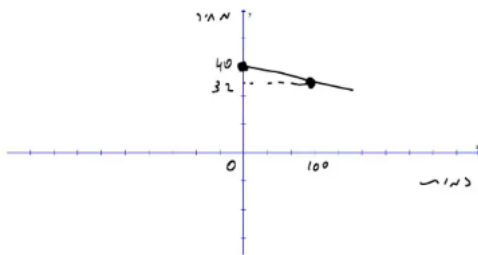
ב. חשב  $x$  ו- $y$ , עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:  
 $p_1 = 100$  ₪,  $p_2 = 3,000$  ₪,  $A = 372,000$  ₪.

## תשובות סופיות

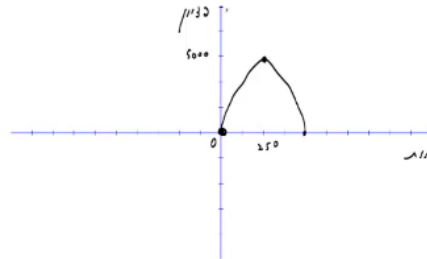


(1) א. 9    ב. 7    ג. 16    ה.  $x(p) = 40 - 4p$     ד.

(2) א.  $R(x) = -0.6x^2 + 120x$ , בתחום:  $x \geq 0$     ב. 2,160    ג. 2,160



(3) א.  $x \geq 0$     ב.    ג.



(4) א.  $x \geq 0$     ב. פונקציית הפדיון:  $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע:  $AR(x) = -0.4x + 100$     ג.  $R'(x) = -0.08x + 100$     ד.  $x > 0$

ד. 1,250; הפדיון המקסימלי: 62,500.

(5) א. פונקציית הפדיון:  $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

הפדיון השולי:  $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$     ב. לא.

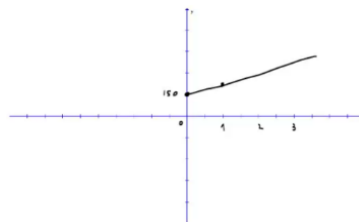
ג. 30; הפדיון המקסימלי: 108,000.

(6) א.  $33\frac{1}{3}$     ב.  $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג.  $-3\frac{1}{3}$ ; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

(7) א. ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל, גם כאשר הוא אינו מייצר.    ב. 170

ג. 250    ד.  $MC(x) = 5$



(8) א. 21.6    ב. 100    ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

א.  $C(100) = 1240$ ,  $C(101) = 1250.804$     ב. 10.8

(9) א. ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת.    ד. גדל.

(10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

(11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

**(12)** 25**(13)** הכמות : 800 , המקסימום : 38,200 .

**(14)**  $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$

**(15)** הוכחה.**(16)** א. כן. ב. לא. ג. הוכחה.**(17)** א. הוכחה. ב.  $x = 4, y = 3600$

## בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

### שאלות

- (1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של \$225 למכונה. עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא \$125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של \$5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?  
 ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמק.
- (2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות. בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.

לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה (כלומר, מה המחיר שיש לקבוע ולכמה דקות) כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית?
- (3) אמן מייצר תכשיטים, בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט. הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט. על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצא כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי.  
 ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?  
 ג. מהי עלות הייצור של האמן (עבור כל התכשיטים) במצב זה?
- (4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.

מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?
- (5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג', ומספר ה-SMS החודשי הממוצע הוא 200.

על כל 5 אג' ש'סלקום מעלה – יורד מספר ה-SMS החודשי הממוצע בעשר. מצא מה צריך להיות מחיר שליחת SMS, כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.
- (6) קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.

מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה בגדולה ביותר? מצא גם מהי ההכנסה המקסימלית.

- (7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪. אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום. על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום. מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?
- (8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪. 5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר, ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר. הוכח שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.
- (9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים בחיר של 500 ₪ לזוג אופניים. לכל  $x$  זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$  ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- $x$  ₪ לזוג אופניים. מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

### תשובות סופיות

- (1) א. 200 ב. \$93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.
- (2) 70 ₪ ל-350 דקות.
- (3) א. 60 ב. 60 ₪ ג. 1,800 ₪
- (4) 40
- (5) 75 אג'.  
 (6) מחיר הכרטיס : 30 ₪, ההכנסה המקסימלית : 3,600 ₪.
- (7) 4,500 ₪.
- (8) הוכחה.
- (9) 350