

# מתמטיקה קורס השלמה

פרק 23 - גבולות ורציפות של פונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים..... 1
2. רציפות של פונקציה של שני משתנים..... 3

## גבול של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

חשב את הגבולות בשאלות 1-3 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (3)$$

חשב את הגבולות בשאלות 4-10 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (6)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (4)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (9)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (8)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (7)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (10)$$

חשב את הגבולות בשאלות 11-16 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (12)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (11)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (13)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (16)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (15)$$

(17) שימוש בגבולות ידועים מחדו"א במשתנה אחד :

א. העזר בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ , וחשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$ .

ב. העזר בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$ , וחשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$ .

\* קחו בחשבון שייתכן שכותב השאלה לא ייתן את הגבול הידוע בגוף השאלה.

**תשובות סופיות**

(1) 0

(2)  $\frac{1}{2}$ 

(3) 2

(4) – 10 אין לפונקציה גבול.

(11) 0

(12) 0

(13) 0

(14) 3

(15) 0

(16) 0

(17) א-ב. 0

## רציפות של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

(1) בדוק את רציפות הפונקציה בנקודה  $(0,0)$ .  
 במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,  
 האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2) נתונה פונקציה ממשית רציפה  $f = f(x)$ , שאינה פונקציה קבועה.

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה  $g$  רציפה בנקודה  $(0,0)$ ?

(3) הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

אם  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y)$  לכל  $y$ ,

וגם  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0)$  לכל  $x$ ,

אז  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$ .

### תשובות סופיות

(1) הפונקציה רציפה.

(2) הפונקציה לא רציפה.

(3) שאלת הוכחה.