מתמטיקה א

פרק 10 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות **1-6**, **על פי הגדרת הגבול**, הוכח:

1) $\lim\limits_{x\to 2} 7x+14=28$

2) $\lim\limits_{x\to 4} x^2+x=20$

3) $\lim\limits_{x\to 24} \sqrt{x+1}=5$

4) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

5) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x}{x^2-2}=1$

6) $\lim\limits_{x\to \alpha} \sin x=\sin\alpha$

7) חשב, **על פי הגדרת הגבול**: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

הוכח, **על פי הגדרת הגבול**, את המקרים **8-11**:

8) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3+x}{x^2+1}=1$

9) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x+7}{x+2}=1$

10) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3-4x}{2x+1}=-2$

11) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=3$

12) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-5$.
הוכח כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f(x)<-4$.

13) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=5$.
הוכח כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f^2(x)>16$.

14) נניח f פונקציה ממשית וחיובית בתחום $[a,\infty)$ המקיימת $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח שמתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{f(x)}=0$.

15) נתון הגבול הבא: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}=1$.

מצא ערך של $M>0$, עבורו לכל $x>M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצא M, כך ש-$\forall x>M: \ \left|f(x)-L\right|<0.1$).

16) מגדירים את הפונקציה הבאה: $f(x)=\begin{cases}2 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\end{cases}$.

האם הגבולות קיימים? הוכח את תשובותיך בהסתמך על הגדרת הגבול.

א. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ב. $\lim\limits_{x\to2.5}f(x)$ ג. $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$

17) בהינתן הגבול $\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x+4}{x+11}$, מצא $\delta>0$, כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-1|<\delta$, אי-השוויון $\left|\frac{2x+4}{x+11}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}$ מתקיים.

18) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ב. אם $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ג. אם $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=L$, אז: הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ קיים ושווה ל-L או $-L$.

ד. אם הגבולות $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ ו-$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ קיימים, אז גם הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ קיים.

19) רוצים להוכיח כי $1\neq\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2}{x+3}$ לפי ההגדרה.

20) רוצים להוכיח כי $1\neq\lim\limits_{x\to4}\frac{2x+1}{x+10}$ לפי ההגדרה.

21) הוכח שאם $\lim\limits_{x\to0}f(x)=3$, אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה $f(x)>2$.

22) הוכח שאם $\lim_{x\to x_0} f(x) > L$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x) > L$.

תשובות סופיות

7) $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר : GOOL.co.il