

אלגברה ליניארית

פרק 3 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטות.....1
2. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות.....6
3. שימושי הדטרמיננטה.....7

דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-5 חשב את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשב את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ א. (7)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ג.}$$

בשאלות 8-10 חשב את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} \text{ (8)}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \text{ (9)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} \text{ (10)}$$

בשאלות 11-12 הראה, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix} \text{ ג.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \text{ ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ א. (11)}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \cdot \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשב:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(16) הוכח כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) : \text{ הוכח כי : (17)}$$

בשאלות 18-19 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|B|=2$, $|A|=4$.
חשב:

(18) א. $|ABA^{-1}B^T|$ ב. $|4A^2B^3|$

(19) א. $| -A^{-2}B^T A^3 |$ ב. $| -2A^2 A^T \text{adj}B |$

(20) נתון: $(PQ)^{-1}APQ = B$.
הוכח: $|A|=|B|$.

(21) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשב את $|B|$.

(22) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשב את $|A|$, $|B|$.

(23) הוכח: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 2. $|\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$.

(24) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכח ש- $|A|=0$.

(25) נתון: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^T A^2$, ו- B הפיכה.
מצא את n .

(26) נתון: $\det(A_{n \times n}) = 2$, $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$.

חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

תשובות סופיות

- (1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1
- (2) א. -1 ב. -3 ג. -14
- (3) א. 24 ב. 234 ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0 ב. 0 ג. 3
- (7) א. 24 ב. 44 ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) הוכחה.
- (17) הוכחה.
- (18) א. 4 ב. 2^{13}
- (19) א. -8 ב. -2^{11}
- (20) הוכחה.
- (21) $\frac{81}{32}$
- (22) $|A|=18, |B|=-2/3$
- (23) הוכחה.
- (24) הוכחה.
- (25) 7
- (26) 4^n

כלל קרמר

שאלות

בשאלות 1-3 פתור את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{l}
 x + 2z + 5t = 8 \\
 -2x - 6y = -8 \\
 5x + 3y - 7z + 4t = 5 \\
 2x + 5y + 44z = 51
 \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l}
 x + z = 3 \\
 4x + y + 8z = 21 \\
 2x + 3z = 8
 \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{l}
 x + 2y = 5 \\
 3x + 4y = 11
 \end{array} \quad (1)$$

תשובות סופיות

$$\begin{array}{l}
 x = 1, y = 2 \quad (1) \\
 x = 1, y = 1, z = 2 \quad (2) \\
 x = y = z = t = 1 \quad (3)
 \end{array}$$

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

- 1) א. חשב את שטח המקבילית שקדקודיה :
 1. $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$ 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$
- ב. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו : $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$.
- ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות : $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$.
- ד. חשב את שטח המשולש שקדקודיו : $(1,2), (3,4), (5,8)$.
- הערה : בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

- 1) א.1. 13 א.2. 14 ב. 22 ג. $3x - y + 4z + 2 = 0$ ד. 2