

אנליזת פורייה

פרק 6 - דיסטריבוציות

תוכן העניינים

1. מבוא (ללא ספר)
2. נגזרת דיסטריביוטיבית 1
3. גבולות דיסטריביוטיביים 2

נגזרת דיסטרביוטיבית:

שאלות:

$$(1) \text{ מצאו } f'(x) \text{ במובן הדיסטרביוטיבי כאשר } f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ x^2 + 2x & 1 \leq x < 2 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

$$(2) \text{ מצאו } f''(x) \text{ במובן הדיסטרביוטיבי כאשר } f(x) = e^{-|x|}$$

$$(3) \text{ מצאו } f''(x) \text{ במובן הדיסטרביוטיבי כאשר } f(x) = |x| \sin(x)$$

$$(4) \text{ תהי } h(x) \in C^\infty(-\infty, \infty) \text{ (פונקציה גזירה אינסוף פעמים) ותהי } L \text{ דיסטרבוציה. הוכיחו כי } (hL)' = h'L + hL' \text{ (כאשר הנגזרות הן במובן הדיסטרביוטיבי).}$$

$$(5) \text{ הוכיחו כי } (1+x-e^x)\delta'''(x) = \delta(x) - 3\delta'(x)$$

$$(6) \text{ יהיו } j, k \in \mathbb{N}. \text{ הראו כי:}$$

$$\text{א. אם } j > k \text{ אז } x^j \cdot \delta^{(k)}(x) = 0$$

$$\text{ב. אם } j \leq k \text{ אז } x^j \cdot \delta^{(k)}(x) = \frac{(-1)^j}{k!(j-k)!} \delta^{(k-j)}(x)$$

$$\text{רמז: תוכלו להיעזר בנוסחת לייבניץ לגזירה } [f(x) \cdot g(x)]^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)$$

תשובות סופיות:

$$(1) f'(x) = 2\delta(x-1) - 4\delta(x-2) + h(x)$$

$$(2) f^{(2)} = -2\delta(x) + e^{-|x|}$$

$$(3) f^{(2)} = \begin{cases} -[2\cos(x) - x\sin(x)] & x < 0 \\ 2\cos(x) - x\sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

$$(4) \text{ הוכחה.}$$

$$(5) \text{ הוכחה.}$$

$$(6) \text{ א. הוכחה. ב. הוכחה.}$$

גבולות דיסטרביוטיביים:

שאלות:

(1) חשבו את הגבול הבא במובן הדיסטרביוטיבי $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta(x+h) - \delta(x-h)}{2h}$

(2) חשבו את הגבול הבא במובן הדיסטרביוטיבי $f_n(x) = \frac{n}{2} e^{-n|x|}$

(3) חשבו את הגבול הבא במובן הדיסטרביוטיבי $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}$

(4) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = \begin{cases} n & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

- א. בדקו האם הסדרה מתכנסת נקודתית על הישר הממשי.
 ב. בדקו האם הסדרה מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי.
 ג. בדקו האם הסדרה מתכנסת במובן הדיסטרביוטיבי.

(5) תהי $f_n(x) = \begin{cases} 1-x^n & |x| < 1 \\ \frac{1}{n} & |x| \geq 1 \end{cases}$ סדרת דיסטרבוציות במרחב D' .

א. מצאו את הגבול הדיסטרביוטיבי $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

ב. מצאו את הגבול הדיסטרביוטיבי $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי אם $\varphi(x)$ פונקציית מבחן אזי $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^n \hat{\varphi}(\omega) = 0$ לכל n טבעי.

ב. יהי N טבעי קבוע. הוכיחו כי הגבול של $f_k(x) = k^N \sin(kx)$ במובן הדיסטרביוטיבי הינו 0.

תשובות סופיות:

$$\delta'(x) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} e^{-n|x|} = \delta(x) \quad (2)$$

$$\left| \int_a^b \sin(\lambda x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx \equiv M \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{א. יהי } x \text{ שרירותי. אם } x \leq 0 \text{ אז } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$$\text{אם } x > 0 \text{ אז החל מ-} n \text{ גדול מספיק מתקיים } \frac{2}{n} < x$$

$$\text{ב. } \sup_{(-\infty, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\text{ג. } \langle f_n(x), \varphi(x) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle$$

$$(5) \quad \text{א. } f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב. } \delta(x+1) - \delta(x-1)$$

$$(6) \quad \text{א. הוכחה. ב. הוכחה.}$$