שדות אלקטרו מגנטיים

פרק 9 - דיפול קוואדרופול ופיתוח מולטיפולי לפוטנציאל

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

שאלות:

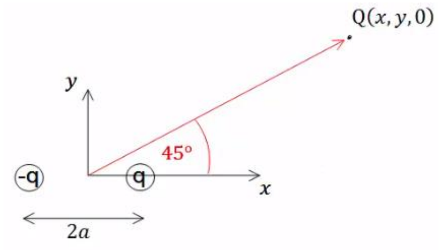
1) דיפול בראשית מזיז אלקטרון

נתון דיפול $\vec{p}=(p,0,0)$ הנמצא בראשית.

א. מצא את הגודל p כך שאלקטרון הממוקם בנקודה $(a,0,0)$ עם מהירות $(v,0,0)$ ייעצר בנקודה $(b,0,0)$.

ב. מצא את הגודל p כך שאלקטרון הממוקם בנקודה $\left(a,-\sqrt{2}a,0\right)$ עם מהירות $(0,0,v)$ יבצע תנועה מעגלית.

2) תרגיל ופיתוח הנוסחה של דיפול מהשדה



שני מטענים בעלי מטען q ו- $-q$ ממוקמים ב- $x=a$ ו- $x=-a$.

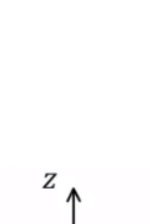
א. חשב את הכוח הפועל על מטען שלישי Q הנמצא בנקודה $(x,y,0)$.

ב. הנח שמרחק המטען מהראשית גדול בהרבה מהמרחק בין המטענים והזווית של וקטור מיקום המטען עם ציר ה- x היא 45 מעלות. השתמש בתשובה של סעיף א' ובקירובים, וחשב מה הכוח הפועל על המטען.

ג. חשב את וקטור מומנט הדיפול שיוצרים המטענים.

ד. חשב שוב את הכוח הפועל על המטען, הפעם השתמש בנוסחה של שדה של דיפול והראה כי התשובה זהה לתשובה של סעיף ב'.

3) חישוב שגיאה



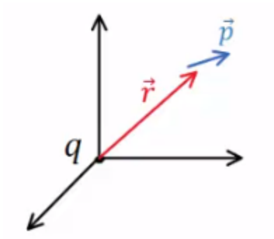
מטען q נמצא ב- $(0,0,d)$ ומטען $-q$ נמצא ב- $(0,0,-d)$.

א. חשב את הפוטנציאל המדויק בנקודה כלשהיא על ציר z.

ב. מהו הערך המינימלי של z כך שהקירוב של הפוטנציאל של דיפול לא יסטה יותר מאחוז אחד מהפוטנציאל האמיתי?

ג. מהו הערך המינימלי של z כך שהקירוב של השדה של דיפול לא יסטה יותר מאחוז אחד מהשדה האמיתי?

4) מטען נקודתי ודיפול (כולל אנרגיה וכוח)



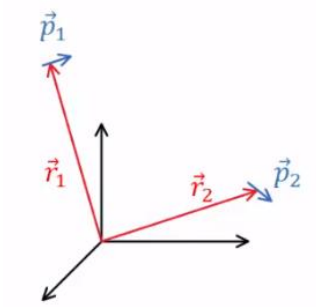
דיפול חשמלי בעל מומנט דיפול $\vec{p}$ נמצא במיקום $\vec{r}$.
מטען נקודתי q נמצא בראשית.
התייחס ל-q , $\vec{p}$ ו-$\vec{r}$ כנתונים.

א. חשב את מומנט הכוח שפועל על הדיפול.

ב. חשב את האנרגיה של הדיפול.

ג. הראה כי הכוח הפועל על הדיפול הוא: $\vec{F}=\frac{k\left(\vec{p}\cdot r^{2}-\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\cdot\vec{r}\right)}{r^{5}}$.

5) אנרגיית דיפול-דיפול



דיפול $\vec{p}_1$ ממוקם ב-$\vec{r}_1$ ודיפול $\vec{p}_2$ ממוקם ב-$\vec{r}_2$.

א. הראה שהאנרגיה של $\vec{p}_2$ בשדה של $\vec{p}_2$

היא: $U=\frac{k}{\tilde{r}^{3}}\left(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2-3\left(\vec{p}_1\cdot\tilde{\hat{r}}\right)\left(\vec{p}_2\cdot\tilde{\hat{r}}\right)\right)$

כאשר: $\tilde{\vec{r}}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$, $\tilde{r}=\left|\tilde{\vec{r}}\right|$ ו-$\tilde{\hat{r}}=\frac{\tilde{\vec{r}}}{\tilde{r}}$.

ב. אנרגיה זו היא בעצם אנרגיה של מערכת דיפול-דיפול, הראה שאם היינו מחשבים את האנרגיה של $\vec{p}_1$ בשדה של $\vec{p}_2$ היינו מקבלים תוצאה זהה.

ג. מצא את הכוח הפועל על $\vec{p}_2$ והכוח על $\vec{p}_1$.

ד. מה שווה הכוח על $\vec{p}_2$ במקרה ש-$\vec{p}_2$ מקביל ל-$\vec{p}_1$ ומקביל ל-$\tilde{\vec{r}}$? ומה הכוח אם $\vec{p}_2$ מקביל ל-$\vec{p}_1$ ומאונך ל-$\tilde{\vec{r}}$.

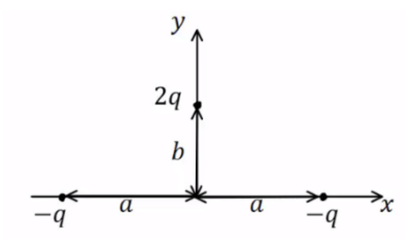
6) קוואדרופול של מטען בודד

מטען נקודתי בודד q ממוקם בנקודה נתונה $\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

א. מצא את ה-Q הכולל את $\vec{p}$ ואת כל הרכיבים של Q_{ij} למערכת.

ב. מניחים מטען נוסף $-q$ בראשית הצירים, כיצד ישתנו הגדלים שחישבת בסעיף א'.

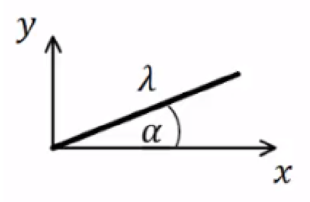
7) משולש מטענים



באיור הבא מתוארת התפלגות מטענים.
חשב את הפוטנציאל רחוק מאוד מההתפלגות עד הסדר הקוואדרופולי.

$V\left(\vec{r}\right)=k\left(\frac{Q_T}{r}+\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^{2}}+\frac{1}{2r^{5}}\sum_{i,j}r_ir_jQ_{ij}\right)$.

8) מטען קווי בזווית



מוט דק באורך L טעון בצפיפות מטען אחידה ליחידת אורך λ. המוט מונח על מישור xy כך שקצה אחד שלו נמצא בראשית.
המוט יוצר זווית α עם ציר ה-x.
מצא את: $\vec{p}$, Q_T ו-Q_{ij} ורשום את הפוטנציאל עד לסדר הקוואדרופולי.

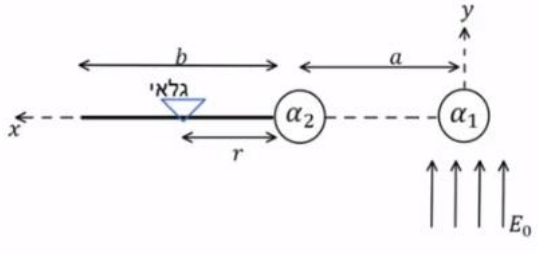
9) קליפה כדורית טעונה

קליפה כדורית ברדיוס R טעונה בצפיפות מטען משטחית: $\sigma(\varphi)=\sigma_0\cos\varphi$
כאשר φ היא הזווית עם ציר ה-z ו-σ_0 קבוע נתון.
מצא את $\vec{p}$, Q_T ואת Q_{ij} ובטא את הפוטנציאל עד הסדר הקוואדרופולי בקואורדינטות כדוריות.

10) מערכת למדידת קיטוביות

המערכת הבאה מיועדת למדידת הקיטוביות של חלקיק. מניחים חלקיק עם קיטוביות ידועה α_1 בראשית ומפעילים רק עליו שדה חשמלי אחיד: $\vec{E}=E_0\hat{y}$.
החלקיק הנמדד נמצא על ציר ה-x ובמרחק a מהראשית.
ניתן להניח שהחלקיקים מאוד קטנים ביחס למרחק ביניהם.
מניחים על ציר ה-x בתחום: $a<x<a+b$ מסילה ועליה גלאי המודד את עוצמת השדה החשמלי. נסמן את המרחק של הגלאי מהחלקיק הנמדד ב-r.

א. מה צריך להיות כיוון הדיפולים שנוצרים בחלקיקים במצב היציב?
ב. הנח ש-α_1 ו-α_2 נתונים וכתוב באמצעותם זוג משוואות מהן ניתן למצא את $\vec{p}_1$ ו-$\vec{p}_2$.
ג. הנח שמומנטי הדיפול ידועים וכתוב ביטוי לשדה החשמלי במיקום של הגלאי.
ד. כאשר הגלאי נמצא ב-$r=r_0$ נתון כי השדה הנמדד הוא אפס.
מצא את α_2.
האם הכרחי לדעת מהו α_1?



תשובות סופיות:

1) א. $p=\frac{1}{2}mV^{2}ek\left(\frac{a^{2}\cdot b^{2}}{b^{2}-a^{2}}\right)$. ב. ראה סרטון.

2) א. $\vec{F}=Q\vec{E}_{T}$. ב. ראה סרטון. ג. $\vec{P}=q2a\hat{x}$. ד. ראה סרטון.

3) א. $\varphi=\frac{kq2d}{z^{2}-d^{2}}$. ב. $z_{\min}=10d$. ג. $z_{\min}\approx 14.14d$.

4) א. $\vec{\tau}=\frac{kq}{r^{3}}\left(\vec{p}\times\vec{r}\right)$. ב. $U=-\frac{kq}{r^{3}}\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)$. ג. הוכחה.

5) א. הוכחה. ב. הוכחה.

ג. $\vec{F}_{2}=\frac{3k}{\tilde{r}^{4}}\left(\vec{p}_{1}\cdot\vec{p}_{2}\cdot\tilde{\vec{r}}+\left(\vec{p}_{2}\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\cdot\vec{p}_{1}+\left(\vec{p}_{1}\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\cdot\vec{p}_{2}-5\left(\vec{p}_{1}\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\left(\vec{p}_{2}\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\hat{\tilde{r}}\right)$, $\vec{F}_{1}=-\vec{F}_{2}$.

ד. $\vec{F}_{2}=-\frac{6k}{\tilde{r}^{4}}p_{1}p_{2}\hat{\tilde{r}}$, $\vec{F}_{2}=\frac{3k}{\tilde{r}^{4}}\left(p_{1}p_{2}\hat{\tilde{r}}\right)$.

6) א. $Q_{T}=q$, $\vec{p}=q\left(x_{0},y_{0},z_{0}\right)$, $Q_{11}=q\left(2x_{0}'^{2}-y_{0}'^{2}-z_{0}'^{2}\right)$, $Q_{12}=\left(3x_{0}'y_{0}'-0\right)q$,
$Q_{13}=3x_{0}'z_{0}'q$, $Q_{21}=3x_{0}'y_{0}'q$, $Q_{22}=\left(2y_{0}'^{2}-x_{0}'^{2}-z_{0}'^{2}\right)q$, $Q_{23}=3y_{0}'z_{0}'q$,
$Q_{31}=3x_{0}'z_{0}'q$, $Q_{32}=3y_{0}'z_{0}'q$, $Q_{33}=\left(2z_{0}'^{2}-x_{0}'^{2}-y_{0}'^{2}\right)q$.

ב. $Q_{T}=0$, $\vec{p}=$ לא משתנה , $Q_{ij}=$ לא משתנה.

7) $V\left(\vec{r}\right)=\frac{k2qby}{r^{2}}+\frac{kq}{r^{5}}\left(-x^{2}\left(2a^{2}+b^{2}\right)+y^{2}\left(a^{2}+2b^{2}\right)+z^{2}\left(a^{2}-b^{2}\right)\right)$.

8) $Q_{T}=\lambda L$, $\vec{p}=\frac{\lambda L^{2}}{2}\left(\cos\alpha\hat{x}+\sin\alpha\hat{y}\right)$, $Q_{xx}=\lambda\left(3\cos^{2}\alpha-1\right)\frac{L^{3}}{3}$,
$Q_{xy}=L^{3}\cos\alpha\sin\alpha$, $Q_{xz}=0$, $Q_{yx}=Q_{xy}$, $Q_{yy}=\frac{\lambda L^{3}}{3}\left(3\sin^{2}\alpha-1\right)$, $Q_{yz}=0$,
$Q_{zx}=0$, $Q_{zz}=-\lambda\frac{L^{3}}{3}$.

$$V\left(\vec{r}\right)=k\left(\frac{\lambda L}{r}+\frac{\lambda L^{2}}{2r^{3}}\left(x\cos\alpha+y\sin\alpha\right)+\frac{1}{2r^{5}}\left(x^{2}\frac{\lambda L^{3}}{3}\left(3\cos^{2}\alpha-1\right)+xyL^{3}\cos\alpha\sin\alpha\cdot 2+y^{2}\frac{\lambda L^{3}}{3}\left(3\sin^{2}\alpha-1\right)+z^{2}\left(-\lambda\frac{L^{3}}{3}\right)\right)\right)$$

9) $Q_{T}=0$, $\vec{p}_{x}=\vec{p}_{y}=0$, $\vec{p}_{z}=4\pi\sigma_{0}R^{3}\cdot\frac{1}{3}$, $Q_{xx}=Q_{yy}=Q_{zz}=0$, $V\left(\vec{r}\right)=\frac{4k\pi\sigma_{0}R^{3}\cos\varphi}{3r^{2}}$.

10) א. שני הדיפולים בכיוון $\hat{y}$. ב. $\vec{p}_{1}=\varepsilon_{0}\alpha_{1}\left(E_{0}\hat{y}-\frac{k\vec{p}_{2}}{a^{3}}\right)$, $\vec{p}_{2}=\varepsilon_{0}\alpha_{2}\left(-\frac{k\vec{p}_{1}}{a^{3}}\right)$.

ג. $\vec{E}=\frac{k\left(-\vec{p}_{1}\right)}{\left(a+r\right)^{3}}+\frac{k\left(-\vec{p}_{2}\right)}{r^{3}}$. ד. $\alpha_{2}=\frac{4\pi a^{3}r_{0}^{3}}{\left(a+r\right)^{3}}$, לא.