

# כלים מתמטיים לפיזיקה

פרק 9 - האינטגרל המסוים, סכומי רימן

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים..... 1
2. אי שוויונים עם אינטגרלים..... 3
3. סכומי רימן..... 4

## האינטגרל המסוים

### שאלות

חשב את האינטגרלים בשאלות 1-10 :

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4 + |x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad (10)$$

**(11)** נתונה פונקציה רציפה  $f$ . הוכח:

א. אם  $f$  זוגית, אזי  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

ב. אם  $f$  אי-זוגית, אזי  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (12)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (13)$$

### תשובות סופיות

(1) -6

(2)  $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3)  $-2e^{-1} + 1$

(4)  $\frac{1}{5}$

(5)  $\arctan 6 - \arctan 3$

(6)  $\frac{\pi}{2}$

(7)  $\frac{17}{12}$

(8)  $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9)  $\frac{\pi^2}{4}$

(10)  $\frac{\pi}{4}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) 0

(13)  $2 \arctan 4$

## אי-שוויונים עם אינטגרלים

הוכח את אי-השוויונים הבאים:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (5)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (6)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (7)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (8)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (9)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## סכומי רימן

חשב את הגבולות בשאלות 6-1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

חשב את האינטגרלים בשאלות 7-10 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכל להיעזר בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n}{2} \alpha \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (9)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (8)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (7)$$

$$(11) \text{ חשב את הגבול: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$1 - \cos 1 \quad (2)$$

$$\ln 2 \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad (5)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\frac{1}{3} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \quad (9)$$

$$2 \quad (10)$$

$$\infty \quad (11)$$