applied calculus for data science

פרק 4 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

לתשומת לבך
בפרק זה אנו מניחים שהנך יודע לגזור פונקציות לפי נוסחאות גזירה כפי שנלמד בבית הספר.
במידה והנחה זו שגויה, עבור ראשית לפרק הבא, למד את הנושא, ורק כשסיימת חזור לכאן.

שאלות*

בשאלות **1-5** חשב את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

1) $f(x)=x^2+4x+1$ **2)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$ **3)** $f(x)=e^x$

4) $f(x)=\ln x$ **5)** $f(x)=\sqrt{x+10}$

6) חשב את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$.

7) חשב את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$.

8) חשב את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x\cdot z(x)$ כאשר $\lim_{x\to 0} z(x)=4$, $z(0)=1$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1} & x\ge 0\\ -(x+1)^2 & x<0\end{cases}$.

א. מצא את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

10) חשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-\ln 4}{x}$ ב. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1+x}-e}{x}$

11) נתון כי f גזירה בנקודה x_0. הוכח כי:

א. $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ב. $2x_0 f(x_0)-x_0^2 f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2 f(x_0)-x_0^2 f(x)}{x-x_0}$

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

12) נתון כי f גזירה וזוגית.
הוכח כי f' אי זוגית.

13) נתונה פונקציה המוגדרת ב-$[a,b]$ ומקיימת לכל x,y ב-$[a,b]$:
$|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$.
הוכח כי f גזירה ב-$[a,b]$ וחשב את נגזרתה.

14) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ x^3 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
חשב את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

15) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
חשב את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

16) הוכח או הפרך:
א. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.
ב. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.
ג. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.
ד. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.

17) הוכח או הפרך:
א. אם f גזירה, אז $f'(x)=\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$.
ב. אם הגבול $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

18) הוכח או הפרך:
א. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$, אז $\lim_{x\to a^+} f'(x)=\infty$.
ב. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim_{x\to a^+} f'(x)=\infty$, אז $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=2x+4$

2) $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$

3) $f'(x)=e^x$

4) $f(x)=\frac{1}{x}$

5) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+10}}$

6) 44!

7) 2

8) 4

9) א. רציפה לכל x. ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

10) א. $\frac{1}{4}$ ב. e

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה. $f'=0$

14) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0)=0$.

15) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1)=0$.

16) שאלת הוכח או הפרך.

17) שאלת הוכח או הפרך.

18) שאלת הוכח או הפרך.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תאר שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמש בפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$, על מנת להדגים שתי שיטות אלה.

בנוסף, הסבר מתי עליך להשתמש בכל אחת מהשיטות שתיארת.

בשאלות **2-7** בדוק גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחר.

בנוסף, רשום נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות:

2) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5<x<0 \\ x^2+2x & x\ge 0 \end{cases}$

6) $f(x)=2+4|x-1|$

7) $f(x)=3x^2+x|x|+1$

8) בדוק האם הפונקציה משאלה **5** גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x\ge -1 \\ \frac{1}{x}+a & x<-1 \end{cases}$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x=-1$.

ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א', בדוק על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=-1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

10) מצא עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases} \ln^3 x & 0<x\le e \\ ax+b & x>e \end{cases}$.

עבור ערכים אלו, רשום נוסחה עבור הנגזרת.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

11) מצא עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f\left(x\right)=\begin{cases} e^x & 0<x\le 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשום נוסחה עבור הנגזרת.

תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי x את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- x (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[-4.1]=-5$, $[4.1]=4$.

12) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]-[-x]$.
חשב את $f'(x)$.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

2) $f'(x)=\begin{cases}2x-4 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

3) $f'(x)=\begin{cases}2x-5 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

4) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

5) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+2x} & -0.5<x<0\\ 2x+2 & x\ge 0\end{cases}$

6) $f'(x)=-4\ (x<1)$, $f'(x)=4\ (x>1)$

7) $f'(x)=4x\ (x<0)$, $f'(x)=8x\ (x\ge 0)$

8) לא גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

9) א. $a=1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

10) $a=3/e \quad b=-2$ $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x}\ln^2 x & 0<x<e\\ \dfrac{3}{e} & x\ge e\end{cases}$

11) $a=e \quad b=0$ $f'(x)=\begin{cases}e^x & 0<x<1\\ e & x\ge 1\end{cases}$

12) $f'(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Z}\\ undefined & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$