

אלגברה לינארית א

פרק 2 - המרחב R^n

תוכן העניינים

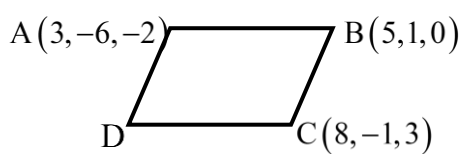
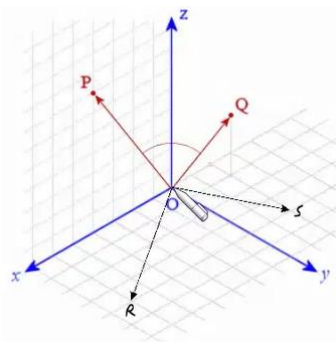
1. וקטורים..... 1
2. מרחב וקטורי..... 6
3. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית..... 7
4. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה..... 9

וקטורים

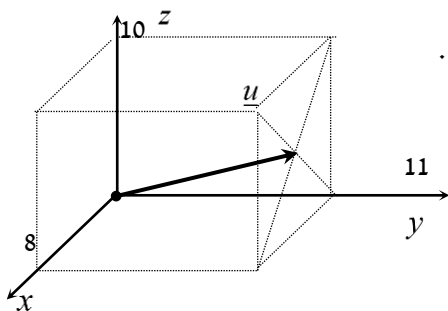
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך \underline{u} . סימונים מקובלים נוספים הם: \vec{u} , $\underline{\underline{u}}$.
את גודל הווקטור \underline{u} נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

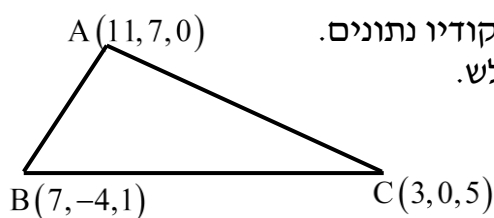
- (1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור. הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצא את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצא מהו הווקטור \underline{u} על פי השרטוט.

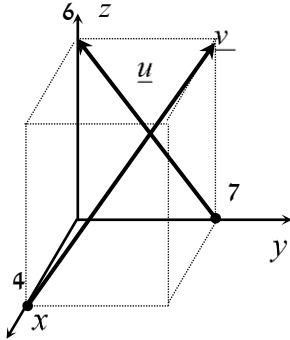


- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):
 א. מצא את הווקטור \overline{EF} , אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$

והווקטור $\overline{MN} = (-1,-1,9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.
 מצא מהו הווקטור \underline{u} ומהו הווקטור \underline{v} .

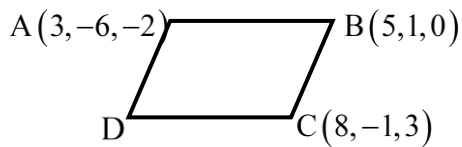
(7) מצא את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$, כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,
 $\underline{v} = (z - 2, y + 1, x - 3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$

א. הראה כי: $\overline{AB} = \overline{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overline{AD} = \overline{BC}$? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,
 ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
 מצא את שיעורי הקדקוד D .
 * אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים: $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{w} = (2, 6, -5)$.
 * בשאלות 13, 14, 16 הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשב:

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות: $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$,
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17) $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18) $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19) $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$$A(-4, 2, 1), B(0, 2, -1), C(-3, -5, 0), D(-7, -5, 2)$$

הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

(21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :
 $A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(22) חשב את הזווית שבין הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} , כאשר :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad (22)$$

מרחב וקטורי

שאלות

בשאלות 1-7 בדוק האם W תת-מרחב של R^3 :

$$W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\} \quad (1)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c\} \quad (2)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\} \quad (3)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\} \quad (4)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\} \quad (5)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid c - b = b - a\} \quad (6)$$

כלומר, a, b, c מהווים סדרה חשבונית.

$$W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\} \quad (7)$$

כלומר, a, b, c מהווים סדרה הנדסית.

תשובות סופיות

(1) כן

(2) כן

(3) כן

(4) לא

(5) לא

(6) כן

(7) לא

צירופים לינאריים, פרישה לינארית ותלות לינארית

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- (1) א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?
 ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלויה לינארית?
- (2) א. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלויה לינארית?
 במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- (3) א. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלויה לינארית?
 במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- (4) נתון $v = (4, 12, k, -2k)$.
 א. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה לינארית?
- (5) נתון $v = (a, b, c, d)$.
 א. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה לינארית?

- (6) הבע את הווקטור $(10, 8, 0, 14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו- u_3 .
 בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (7) הבע את הווקטור $(7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4 .
 בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (8) עבור איזה ערכים של a, b, c , הווקטורים הבאים תלויים לינארית:
 $\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = u_1 - 2u_3, u_1 = 2u_3 + u_2$.
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = 4u_4 - u_1, u_1 = 4u_4 - u_2$.
- (4) א+ב+ג. $k = -4$
- (5) $a = 5t + 3s, b = 4t - 13s, c = 7s, d = 7t$
- (6) אינסוף.
- (7) אינסוף.
- (8) לכל ערך של a, b, c .

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

- (1) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :
- א. $\{(1,0,1), (0,0,1)\}$
 ב. $\{(1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1)\}$
 ג. $\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\}$
- (2) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T = \{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4)\}$
- א. האם T בסיס ל- R^3 ?
 ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה ליניארית ב- T .
 ג. השלם את T' לבסיס של R^3 .

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

- (3) לפינך 3 מערכות של משוואות הומוגניות :
- $$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \quad .3 \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad .2 \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad .1$$
- נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
 נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
 נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
 מצא בסיס וממד ל- U, W, V .

- (4) נתון $U = \{(a,b,c,d) \in R^4 \mid a=c, b=d\}$
 מצא בסיס וממד ל- U .

- (5) נתון $U = \{(a,b,c,d) \in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$
 מצא בסיס וממד ל- U .

- (6) נתון $U = \{v \in R^4 \mid v \cdot (1,-1,1,-1) = 0\}$
 מצא בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

בשאלות 7 ו-8 נתונים שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1,1,-1,2), (3,-1,7,4), (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1), (1,1,3,-3), (5,1,5,8)\}$$

(7) מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

(8) מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות 9 ו-10 מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציין את דרגת המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. לא. ב. $T' = \{(1,2,3), (4,5,6)\}$ ג. $T' = \{(1,2,3), (4,5,6), (0,0,1)\}$
- (3) W - בסיס: $\{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$, ממד: 2.
- U - בסיס: $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$, ממד: 2.
- V - בסיס: $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$, ממד: 3.
- (4) בסיס: $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$, ממד: 2.
- (5) בסיס: $\{(-1, 1, 0, 1), (2, -1, 1, 0)\}$, ממד: 2.
- (6) בסיס: $\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$, ממד: 3.
- (7) בסיס: $\{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2)\}$, ממד: 2.
- (8) בסיס: $\{(1, -1, 1, 1), (0, -1, 1, -2), (0, 0, -2, 5)\}$, ממד: 3.
- (9) מרחב שורה: בסיס: $\{(4, 1, 1, 5), (0, 11, -5, 3)\}$, ממד: 2.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.
- (10) מרחב שורה: בסיס: $\{(1, 2, 1, 3, 5), (0, 11, -5, -4), (0, 0, 0, 1, 1)\}$, ממד: 3.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 37 \end{pmatrix} \right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.