

# השלמה פרונטלית באלגברה לינארית

פרק 1 - המרחב  $R^n$

תוכן העניינים

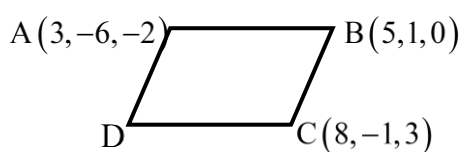
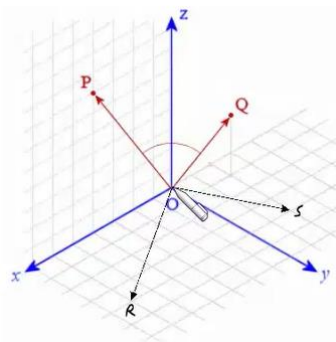
1. וקטורים.....1
2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית.....6

## וקטורים

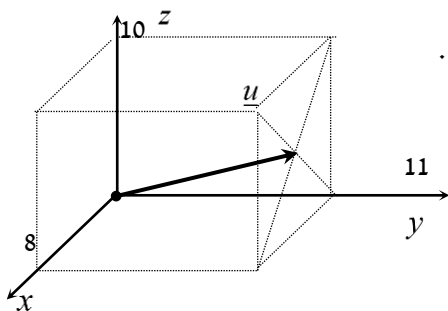
**הערת סימון:** אנו נסמן את הווקטור  $u$  כך  $\underline{u}$ . סימונים מקובלים נוספים הם:  $\vec{u}$ ,  $\underline{\underline{u}}$ .  
את גודל הווקטור  $\underline{u}$  נסמן כך  $|\underline{u}|$ . סימון מקובל נוסף הוא  $\|\underline{u}\|$ .  
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

## שאלות

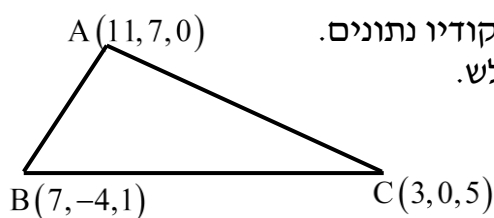
- (1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$  שבאיור. הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצא את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



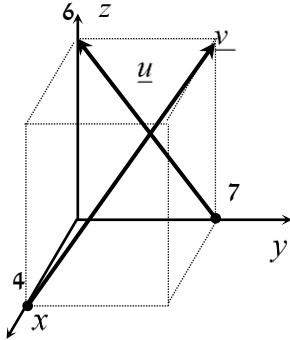
- (3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.



- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):  
 א. מצא את הווקטור  $\overline{EF}$ , אם נתונות הנקודות  $E(2,0,-3)$  ו-  $F(7,-1,-3)$ .

ב. מצא את שיעורי הנקודה  $N$ , אם נתונה הנקודה  $M(0,-4,1)$  והווקטור  $\overline{MN} = (-1,-1,9)$ .



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.  
 מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

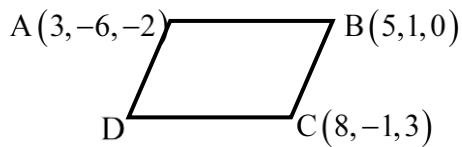
(7) מצא את  $x$ ,  $y$  ו-  $z$ , אם נתון ש-  $\underline{u} = \underline{v}$ , כאשר  $\underline{u} = (4, -1, 2)$ ,  
 $\underline{v} = (z - 2, y + 1, x - 3)$ .

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$ ,  $B(3,7,-4)$ ,  $C(6,9,0)$ ,  $D(7,4,10)$ ,  $E(9,11,4)$

א. הראה כי:  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר כי גם  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,  
 ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.  
 מצא את שיעורי הקדקוד  $D$ .  
 \* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים:  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ,  $\underline{w} = (2, 6, -5)$ .  
 \* בשאלות 13, 14, 16 הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשב:

א.  $2\underline{u}$       ב.  $-0.5\underline{v}$       ג.  $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשב:

א.  $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$       ב.  $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12)  $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13)  $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14)  $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15)  $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16)  $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות:  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ ,  
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17)  $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18)  $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19)  $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$$A(-4, 2, 1), B(0, 2, -1), C(-3, -5, 0), D(-7, -5, 2)$$

הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

**(21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :  
 $A(1,2,0)$  ,  $B(-2,5,3)$  ,  $C(-1,8,4)$  ,  $D(4,3,-1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**(22)** חשב את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ , כאשר :

א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5)$  ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1)$  ,  $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3)$  ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$

## תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left( \frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad (22)$$

## צירופים לינאריים, פרישה לינארית ותלות לינארית

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- 1 א. האם  $u_1$  הוא צירוף לינארי של  $u_4$ ?  
 ב. האם  $u_1$  שייך ל- $Sp\{u_4\}$ ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_4\}$  תלויה לינארית?
- 2 א. האם  $u_3$  הוא צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. האם  $u_3$  שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_2, u_3\}$  תלויה לינארית?  
 במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 3 א. האם  $u_4$  הוא צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. האם  $u_4$  שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_2, u_4\}$  תלויה לינארית?  
 במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 4 נתון  $v = (4, 12, k, -2k)$ .  
 א. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהקבוצה  $\{u_1, u_2, v\}$  תהיה תלויה לינארית?
- 5 נתון  $v = (a, b, c, d)$ .  
 א. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהקבוצה  $\{u_1, u_2, v\}$  תהיה תלויה לינארית?

- (6) הבע את הווקטור  $(10, 8, 0, 14)$  כצירוף לינארי של  $u_1, u_2$  ו- $u_3$ .  
 בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (7) הבע את הווקטור  $(7, 10, -2, 11)$  כצירוף לינארי של  $u_1, u_2, u_3$  ו- $u_4$ .  
 בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (8) עבור איזה ערכים של  $a, b, c$ , הווקטורים הבאים תלויים לינארית:  
 $\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$

### תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן,  $u_2 = u_1 - 2u_3, u_1 = 2u_3 + u_2$ .
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן,  $u_2 = 4u_4 - u_1, u_1 = 4u_4 - u_2$ .
- (4) א+ב+ג.  $k = -4$
- (5)  $a = 5t + 3s, b = 4t - 13s, c = 7s, d = 7t$
- (6) אינסוף.
- (7) אינסוף.
- (8) לכל ערך של  $a, b, c$ .