

מתמטיקה מורחב

פרק 20 - המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)..... 1

המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכח כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות, אזי:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזור את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשב את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

(10) חקור את הפונקציה $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$, לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) $I'(x) = e^{-x^2}$

(4) $I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2$

(5) $I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x)$

(6) $I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

(7) $\frac{1}{2}$

(8) $\frac{2}{3}$

(9) $4e^{16}$

(10) תחום הגדרה: כל x .נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל x .נקודות פיתול: $x = -1, 1, -\frac{3}{7}$.תחומי קמירות: $x > 1$, $-1 < x < -\frac{3}{7}$.תחומי קעירות: $-1 < x < 1$, $-\frac{3}{7} < x < 1$.