

תורת ההסתברות

פרק 53 - המשתנה המקרי הדו ממדי הרציף

תוכן העניינים

1. משתנה דו ממדי רציף 1

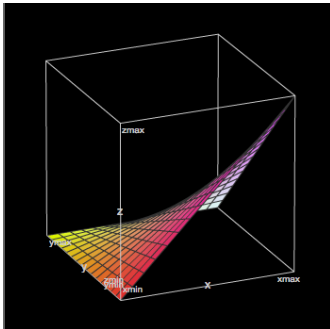
משתנה מקרי דו ממדי רציף:

רקע:

יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים המוגדרים בתחום R מסוים. פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם תסומן על ידי $f(x, y)$. פונקציית צפיפות משותפת צריכה לקיים את שני התנאים הבאים:

$$f(x, y) \geq 0 \quad \text{לכל } (x, y) \in R \quad (1)$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = 1 \quad (2)$$



דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} : \text{נתונה הפונקציה}$$

הראו שפונקציה זו יכולה להיות פונקציית צפיפות משותפת.

פונקציית צפיפות שולית:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy : \text{פונקציית הצפיפות השולית של } X \text{ תתקבל באופן הבא}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx : \text{פונקציית הצפיפות השולית של } Y \text{ תתקבל באופן הבא}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} : \text{מצאו לפונקציית הצפיפות}$$

את פונקציית הצפיפות השולית של X , וחשבו את $E(X)$ דרכה.

אי-תלות בין משתנים רציפים:

X ו- Y יהיו משתנים מקרים בלתי תלויים, אם עבור כל X ו- Y בתחום ההגדרה R מתקיים ש:

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

האם X ו- Y , המתפלגים לפי פונקציית הצפיפות המשותפת:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

הם משתנים בלתי תלויים?

חישוב הסתברויות עבור משתנה מקרי רציף דו ממדי:

הנפח הכלוא מתחת למשטח $f(x, y)$ בתחום מסוים ייתן את ההסתברות ש- X

$$\text{ו-} Y \text{ יהיו בתחום הזה: } P[(x, y) \in A] = \iint_A f(x, y) dx dy$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ : משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

חשבו את הסיכוי: $P(X < 0.5 \cap Y < 0.5)$.

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת:

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת הינה פונקציה של שני משתנים רציפים המחזירה את הסיכוי שהמשתנים יהיו קטנים מערכים מסוימים:

$$F(s, t) = P(X \leq s \cap Y \leq t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s f(x, y) dx dy$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ : משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת

ועל פיה חשבו את הסיכוי: $P(X < 0.5 \cap Y < 0.5)$.

פונקציית צפיפות מותנית:

אם ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x, y)$, אז מגדירים את פונקציית הצפיפות המותנית של X , בהינתן ש- $Y = y$ לכל ערכי y

$$. f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \quad \text{על ידי } f(y) > 0$$

באופן דומה, פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן ש- $X = x$ לכל ערכי x

$$. f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \quad \text{על ידי } f(x) > 0$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$. f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

$$. f(x|y)$$

תוחלת מותנית:

ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x, y)$.

$$. E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y) dx \quad \text{בהינתן ש- } Y = y \text{ תהיה:}$$

ובאופן דומה, התוחלת של Y בהינתן ש- $X = x$ תהיה:

$$. E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x) dy$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$. f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

$$. E(X|Y)$$

שאלות:

- (1) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = x + y$, המוגדרת בתחום שבו: $0 \leq x \leq 1$ וגם: $0 \leq y \leq 1$. הוכיחו שמדובר בפונקציית צפיפות.
- (2) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = Ax(x - y)$, המוגדרת בתחום שבו: $0 \leq x \leq 2$ וגם: $-x \leq y \leq x$. מצאו את ערכו של הפרמטר A .
- (3) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = \frac{(x \cdot y)^3 + x \cdot y}{C}$, המוגדרת בתחום שבו: $0 \leq x \leq 1$ וגם: $0 \leq y \leq 1$.
- מצאו את ערכו של C .
 - מצאו את $f(y)$.
 - האם X ו- Y הינם משתנים בלתי תלויים?
- (4) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = \frac{1}{800}$, המוגדרת בתחום שבו: $60 \leq x \leq y$ וגם: $60 \leq y \leq 100$.
- הראו שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקציית צפיפות.
 - מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של Y .
 - חשבו את $E(X)$, $V(X)$.
 - האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?
 - חשבו את מקדם המתאם בין X ל- Y .
 - חשבו את הסיכוי: $P(Y > X + 10)$.
- (5) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:
- $$f(x, y) = \lambda \mu \cdot e^{-(\lambda x + \mu y)}$$
- בתחום שבו: $x, y > 0$.
- מצאו את פונקציית הצפיפות של X ואת פונקציית הצפיפות של Y .
 - האם X ו- Y הם משתנים תלויים?
 - מהו מקדם המתאם בין X ל- Y ?
 - חשבו את הסיכוי: $P(Y > X)$.

(6) Y הינו משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בקטע: $[2, 4]$.

בנוסף, נתון ש- X הינו משתנה מקרי רציף המקיים: $0 \leq x \leq y$, $f(x|y) = \frac{2x}{y^2}$.
מצאו את השונות המשותפת של X ו- Y .

(7) נתונים שני משתנים מקרים רציפים X ו- Y . פונקציות הצפיפות

המשותפות שלהם היא: $f(x, y) = \begin{cases} x & 0 < y < 1 \\ 0 & 1 - y \leq x \leq 1 + y \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

א. מצאו את $f(x)$.

ב. מצאו את $f(y|x)$.

ג. מצאו את $E(Y|X)$.

(8) יהיו X ו- Y משתנים רציפים המתפלגים אחיד בתוך משולש

שקדקודיו: $(-1, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

א. רשמו את פונקציית הצפיפות המשותפת.

ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של X ו- Y .

ג. חשבו את התוחלת של X ו- Y .

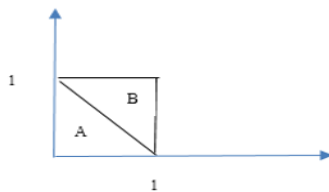
ד. האם X ו- Y משתנים בלתי מתואמים?

ה. האם X ו- Y משתנים בלתי תלויים?

(9) פונקציית צפיפות משותפת מקבלת ערך אחיד באופן הבא:

הצפיפות על פני משולש A הינה 1.5 והצפיפות על פני משולש B היא 0.5.

האם פונקציית הצפיפות המשותפת היא לגיטימית?



א. מצאו את $f(x)$.

ב. מצאו את $f(x|y)$.

(10) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f(x, y) = cx$. פונקציה זו מוגדרת

בתחום שבו: $0 \leq x \leq 1$ וכן: $0 \leq y \leq x^2$.

א. מצאו את הקבוע C .

ב. חשבו את ההסתברות ש- $6Y < 1 - X$.

(11) נתונים X ו- Y שני משתנים מקריים רציפים כך ש: $Y \sim U(0,1)$

ו- $X|Y=y \sim U(0, \sqrt{y})$. חשבו את: $E(Y|X=0.5)$.

(12) נתונה פונקציית הצפיפות: $f(x, y) = 2e^{-x} \cdot e^{-2y}$ בתחום שבו: $x, y \geq 0$.

חשבו את הסיכוי: $P(X < Y)$.

(13) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f(x, y) = \frac{e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y}$, המוגדרת לרביע

הראשון. חשבו את: $P(X > 1|Y = 2)$.

(14) יוסי וערן עובדים באותו המשרד. הם מגיעים לעבודה בכל יום בין 8:00 ל-9:00.

נניח שזמן ההגעה של כל אחד מתפלג אחיד ובאופן בלתי תלוי זה בזה.

מה הסיכוי שיוסי יצטרך לחכות לערן יותר מ-10 דקות?

(15) נתונים שני משתנים מקרים רציפים: $X \sim N(Y, 1)$ ו- $Y \sim U(0, 2)$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y .

ב. מצאו את $E(X^2|Y)$.

ג. מצאו את $E(X)$.

(16) פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y היא: $f(x, y) = 1$.

פונקציה זו מוגדרת בתחומי: $0 \leq x, y \leq 1$.

הוכיחו ש: $E(|X - Y|^n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

(17) $X \sim \exp(1)$ וכן: $Y \sim \exp(1)$, הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.

נגדיר את: $Z = \frac{X}{X+Y}$.

הוכיחו: $Z \sim U(0, 1)$.

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) $A = \frac{1}{8}$.

(3) א. $\frac{5}{16}$ ב. $f(y) = 0.8y^3 + 1.6y$ ג. תלויים.

(4) א. שאלת הוכחה. ב. $f(y) = \frac{y-60}{800}$ ג. $E(X) = 73\frac{1}{3}$, $V(X) = 88\frac{8}{9}$.

ד. לא. ה. 0.5 ו. 0.5625

(5) א. $f(y) = \mu e^{-\mu y}$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ב. לא.

ג. 0. ד. $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

(6) $\frac{2}{9}$.

(7) א. $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2x - x^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$$E(y|x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \leq x < 1 \quad 1 - x < y < 1 \\ \frac{1}{2-x} & 1 \leq x \leq 2 \quad x-1 < y < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

(8) א. $f(x, y) = \begin{cases} 1 & 1+x < y < 1-x-1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$$f(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y < 1 \\ 2-y & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

ג. $E(X) = -\frac{2}{3}$, $E(Y) = 1$ ד. כן.

ה. לא.

$$f(x) = \begin{cases} 1.5-x & 1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{9) א. כן.}$$

$$f(x|y) = \begin{cases} \frac{1.5}{1.5-y} & 0 \leq x < 1-y \\ \frac{0.5}{1.5-y} & 1-y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\text{10) א. 4. ב. 0.0947.}$$

$$\frac{7}{12} \quad \text{11)}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{12)}$$

$$e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{13)}$$

$$\frac{25}{72} \quad \text{14)}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{א. 15)}$$

$$y^2 + 1 \quad \text{ב.}$$

$$\text{ג. 1.}$$

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.