אלגברה ליניארית 2

פרק 2 - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות **1-15**, קבע, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה לינארית :

1) $T:R^2\to R^2 \;;\; T(x,y)=(x+y,x-y)$

2) $T:R^3\to R^3 \;;\; T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)$

3) $T:R^3\to R^2 \;;\; T(x,y,z)=(2x+z,|y|)$

4) $T:R^2\to R^3 \;;\; T(x,y)=(xy,y,z)$

5) $T:R^3\to R^3 \;;\; T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)$

6) $T:M_n[R]\to M_n[R] \;;\; T(A)=BA+AB \quad (B\in M_n[R])$

7) $T:M_n[R]\to M_n[R] \;;\; T(A)=A+A^T$

8) $T:M_n[R]\to M_n[R] \;;\; T(A)=|A|\cdot I$

9) $T:M_n[R]\to M_n[R] \;;\; T(A)=A\cdot A^T$

10) $T:M_n[R]\to M_n[R] \;;\; T(A)=A^{-1}$

11) $T:P_3[R]\to P_2[R] \;;\; T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2$

12) $T:P_n[R]\to P_n[R] \;;\; T\left(p(x)\right)=p(x+1)$

13) $T:P_n[R]\to P_n[R] \;;\; T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)$

14) $T:P_n[R]\to P_{2n}[R] \;;\; T\left(p(x)\right)=p^2(x)$

15) $T:C[F]\to C[F] \;;\; T\left(z\right)=\overline{z} \quad (F=C,F=R)$

16) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה לינארית:
$T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)\quad;\quad T:R^2\to R^2$?

בשאלות **17-20**, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון.
אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

17) $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(1,1,0)=(1,2,3)$, $T(0,1,1)=(4,5,6)$, $T(0,0,1)=(7,8,9)$.

18) $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(1,0,1)=(1,1,0)$, $T(0,1,1)=(1,2,1)$, $T(0,0,1)=(0,1,1)$.

19) $T:R^4\to R^3$ כך ש-
$T(1,2,-1,0)=(0,1,-1),T(-1,0,1,1)=(1,0,0),T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

20) $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T(1)=4,T\left(4x+x^2\right)=x,T(1-x)=x^2+1$.

21) נתונה העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$, המקיימת:
$$T(1,0,0)=(a_1,a_2,a_3)$$
$$T(0,1,0)=(b_1,b_2,b_3)$$
$$T(0,0,1)=(c_1,c_2,c_3)$$

א. הוכח שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

ב. נסח והוכח טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T:R^n\to R^m$.

22) נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$.
הוכח או הפרך:

א. אם $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

תשובות סופיות

1) כן	**2)** כן	**3)** לא	**4)** לא	**5)** כן
6) כן	**7)** כן	**8)** לא	**9)** לא	**10)** לא
11) כן	**12)** כן	**13)** כן	**14)** לא	**15)** לא
16) כן	**17)** כן	**18)** כן	**19)** כן	**20)** כן
21) הוכחה.		**22)** הוכחה.		

גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-6**, מצא:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

(1 $T:R^4 \to R^3$, $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)$

(2 $T:R^3 \to R^4$, $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)$

(3 $T:R^4 \to R^3$, $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

(4 $T:M_2[R]\to M_2[R]$, $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot A$

(5 $T:P_2[R]\to P_2[R]$, $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)$

(6 $D:P_3[R]\to P_3[R]$, $D\left(p(x)\right)=p'(x)$

(7 מצא העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^3$,
אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

(8 מצא העתקה ליניארית $T:R^4 \to R^3$,
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

נתונה העתקה ליניארית $T:V \to U$.

(9 הוכח כי אם $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$ אז הממד של V זוגי.

(10 הוכח או הפרך:

א. קימת העתקה ליניארית $T:R^5 \to R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

ב. קימת העתקה ליניארית $T:R^4 \to R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

11) ידוע שהעתקה לינארית $T:V\to W$,
מקיימת: $\dim(W)=4$, $\dim \mathrm{Im}(T)=\dim \mathrm{Ker}(T)$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של V?
א. 10
ב. 9
ג. 7
ד. 6
ה. כל התשובות לא נכונות.

12) הוכח או הפרך:
א. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ מתקיים $\mathrm{Im}(T^2)\subseteq \mathrm{Im}(T)$.
ב. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ שמקיימת:
$\mathrm{Ker}(T)=\mathrm{Ker}(T^2)$, $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Im}(T^2)$, מתקיים $T=T^2$.
ג. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\mathrm{Im}(T)\subseteq \mathrm{Ker}(T)$,
אז בהכרח $T\neq 0$.

13) מטריצה $A_{m\times n}$ מגדירה העתקה $T:R^n\to R^m$; $T(x)=Ax$,
ואילו $A^T_{n\times m}$ מגדירה העתקה $S:R^m\to R^n$; $S(y)=A^T y$.
הראה כי $\mathrm{Im}(T)=(\mathrm{Ker}(S))^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד: 3.

2) גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1),(0,5,1,4),(0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

3) גרעין – בסיס: $\{(-7,3,0,1),(1,-2,1,0)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2),(0,1,2)\}$, מימד: 2.

4) גרעין – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

5) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=2x+5 \quad , \quad p(x)=1\}$, מימד: 2.

6) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=x^2, \quad p(x)=x, \quad p(x)=1\}$, מימד: 3.

7) $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&4&1\\4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

8) $T(x,y,z,t)=(-x-y+z,-2x-y+t,0)$

9) הוכחה.

10) לא.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-4**, קבע האם היא חח״ע,[1] האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצא אותה.

1) $T:R^3 \to R^3 \quad , \quad T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3 \to R^3 \quad , \quad T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R] \to R^3 \quad , \quad T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R] \to P_3[R] \quad , \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

5) האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4 \to R^3$?

6) נתונה העתקה לינארית $T:U \to V$.
הוכח:
א. אם $\dim(U)<\dim(V)$, אז T לא על.
ב. אם $\dim(U)>\dim(V)$, אז T לא חח״ע.
ג. אם $\dim(U)=\dim(V)$, אז T חח״ע $\Leftrightarrow$ T על.

7) נתונה העתקה לינארית $T:V \to W$.
הוכח או הפרך:
א. אם $\dim \operatorname{Ker}(T) \neq 0$, אז ההעתקה T אינה על.
ב. אם $\dim \operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V) \le \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
ג. אם $\dim \operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V) \ge \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
ד. אם $\dim(V)<\dim(W)$, אז ההעתקה T חח״ע.

[1] הערה: העתקה חח״ע נקראת גם לא-סינגולרית.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$; $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V.
הוכח או הפרך :
א. אם $\dim(V)>\dim(W)$ ואם $T(v_1)=0$, אז ייתכן מקרה שבו T חח״ע.
ב. אם $\dim(V)>\dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת״ל.

9) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$.
$\{v_1,v_2...,v_n\}$ קבוצה בת״ל ב- V.
הוכח או הפרך :
א. אם T חח״ע, אז הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת״ל ב- W.
ב. אם הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת״ל ב- W, אז T חח״ע.

10) נתונה העתקה ליניארית $T:R^n\to R^m$.
הוכח או הפרך :
א. אם T היא איזומורפיזם אז $m=n$.
ב. אם $m>n$, אז T חח״ע.
ג. אם $T(v)=Av$ לכל v, אז למטריצה A יש n שורות ו- m עמודות.

11) נתונה העתקה ליניארית $T:V\to V$, המקיימת $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Ker}(T)$.
הוכח או הפרך :
א. אם T על, אז בהכרח $V=\{0\}$.
ב. אם T חח״ע, אז בהכרח $V=\{0\}$.
ג. T היא איזומורפיזם.
ד. T היא העתקת האפס.

12) נתונה העתקה ליניארית $T:R^n\to R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m\times n}$,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכח או הפרך :
א. אם $v\in\mathrm{Ker}(T)$, אז $v\in\mathrm{rowsp}(A)$.
ב. אם $v\in\mathrm{rowsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Ker}(T)$.
ג. אם $v\in\mathrm{colsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Im}(T)$.
ד. אם $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$, אז $n<m$.

13) נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \to R^n$, ונתונה מטריצה A,
כך ש- $T(v) = Av$, לכל $v \in R^n$.
הוכח את הטענות הבאות:
א. אם $\operatorname{rank}(A) = n$, אז T חח"ע.
ב. אם $\operatorname{rank}(A) = n$, אז T על.
ג. אם $T^2(v) = 0$, אז $\operatorname{Im}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$.
ד. אם $T^2(v) = 0$, אז $\operatorname{rank}(A) \le \frac{n}{2}$.

14) נתונה העתקה ליניארית $T: P_3[R] \to R$, המוגדרת על ידי $T(p(x)) = p(1)$.
א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.
ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.
ג. ענה על הסעיפים הקודמים עבור $T: P_n[R] \to R$.

15) נתונה העתקה ליניארית $T: M_n[R] \to M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A) = A^T$.
א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.
ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.
ג. מצא את ההעתקה ההפוכה של T.

תשובות סופיות

1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}(x+y-2z),\frac{1}{3}(2y-z-x),\frac{1}{3}(z+x+y)\right)$$

2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a,b,c)=0.4a+0.6b+0.2c+(-0.4a+0.4b+0.2c)x+(-0.4c-0.2b+0.2a)x^2$$

4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$$

5) לא.

6) הוכחה.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

14) א. $\operatorname{Ker}(T)=span\{-1+x,-1+x^2,-1+x^3\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=3$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

ב. לא חח"ע, כן על.

ג. $\operatorname{Ker}(T)=span\{-1+x,-1+x^2,\dots,-1+x^n\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=n$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

לא חח"ע, כן על.

15) א. $\operatorname{Im}(T)=M_n[R]$, $\operatorname{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\}$ ב. חח"ע ועל. ג. $T^{-1}(A)=A^T$

פעולות עם העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות **1-9**, תהיינה $S:R^3\to R^2$ ו- $T:R^3\to R^3$ העתקות ליניאריות המוגדרות על ידי: $S(x,y,z)=(x-z,y)$, $T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$.

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

1) $S+T$ **2)** $4S$ **3)** $4S-10T$ **4)** TS **5)** ST

6) T^2 **7)** T^{-1} **8)** T^{-2} **9)** S^2

תשובות סופיות

1) לא ניתן להגדיר.

2) $4S=4(x-z,y)$

3) לא ניתן להגדיר.

4) לא ניתן להגדיר.

5) $ST:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$; $St(x,y,z)=(z-4y,4x-y)$

6) $T^2(x,y,z)=(x,y,16x-8y+z)$

7) $T^{-1}(x,y,z)=(x,4x,-y,17x-4y-z)$

8) $T^{-2}(x,y,z)=(x,y,-16x+8y+z)$

9) לא ניתן להגדיר.