# אלגברה ליניארית : ידה ידה - בלה בלה בלה

## פרק 7 - העתקות ליניאריות

### תוכן העניינים

# גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-6**, מצא:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

**1)** $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)\ ,\ T:R^4\to R^3$

**2)** $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)\ ,T:R^3\to R^4$

**3)** $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\ ,\ T:R^4\to R^3$

**4)** $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A\ ,\ T:M_2[R]\to M_2[R]$

**5)** $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)\ ,\ T:P_2[R]\to P_2[R]$

**6)** $D\left(p(x)\right)=p'(x)\ ,\ D:P_3[R]\to P_3[R]$

**7)** מצא העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$,
אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

**8)** מצא העתקה ליניארית $T:R^4\to R^3$,
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

נתונה העתקה ליניארית $T:V\to U$.

**9)** הוכח כי אם $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$ אז הממד של $V$ זוגי.

**10)** הוכח או הפרך:

א. קימת העתקה ליניארית $T:R^5\to R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

ב. קימת העתקה ליניארית $T:R^4\to R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

**11)** ידוע שהעתקה לינארית $T:V\to W$,
מקיימת: $\dim(W)=4$ , $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של $V$?

א. 10
ב. 9
ג. 7
ד. 6
ה. כל התשובות לא נכונות.

**12)** הוכח או הפרך:

א. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ מתקיים $\operatorname{Im}(T^2)\subseteq\operatorname{Im}(T)$.
ב. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ שמקיימת:
$\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Ker}(T^2)$ , $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Im}(T^2)$, מתקיים $T=T^2$.
ג. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\operatorname{Im}(T)\subseteq\operatorname{Ker}(T)$,
אז בהכרח $T\neq 0$.

**13)** מטריצה $A_{m\times n}$ מגדירה העתקה $T:R^n\to R^m$ ; $T(x)=Ax$,
ואילו $A^T_{n\times m}$ מגדירה העתקה $S:R^m\to R^n$ ; $S(y)=A^Ty$.
הראה כי $\operatorname{Im}(T)=(\operatorname{Ker}(S))^{\perp}$.

## תשובות סופיות

1) גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד: 3.

2) גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1),(0,5,1,4),(0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

3) גרעין – בסיס: $\{(-7,3,0,1),(1,-2,1,0)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2),(0,1,2)\}$, מימד: 2.

4) גרעין – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

5) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=2x+5 \quad , \quad p(x)=1\}$, מימד: 2.

6) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=x^2, \quad p(x)=x, \quad p(x)=1\}$, מימד: 3.

7) $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

8) $T(x,y,z,t)=(-x-y+z,-2x-y+t,0)$

9) הוכחה.

10) לא.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

# העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

## שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-4**, קבע האם היא חח"ע,[1] האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצא אותה.

**1)** $T:R^3\to R^3 \quad , \quad T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

**2)** $T:R^3\to R^3 \quad , \quad T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

**3)** $T:P_2[R]\to R^3 \quad , \quad T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

**4)** $T:M_2[R]\to P_3[R] \quad , \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

**5)** האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4\to R^3$?

**6)** נתונה העתקה ליניארית $T:U\to V$.
הוכח:

א. אם $\dim(U)<\dim(V)$, אז $T$ לא על.

ב. אם $\dim(U)>\dim(V)$, אז $T$ לא חח"ע.

ג. אם $\dim(U)=\dim(V)$, אז $T$ חח"ע $\Leftrightarrow$ $T$ על.

**7)** נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$.
הוכח או הפרך:

א. אם $\dim \operatorname{Ker}(T)\neq 0$, אז ההעתקה $T$ אינה על.

ב. אם $\dim \operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\le\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ היא על.

ג. אם $\dim \operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\ge\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ היא על.

ד. אם $\dim(V)<\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ חח"ע.

[1] הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

**8)** נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$ ; $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של $V$.

הוכח או הפרך:

א. אם $\dim(V)>\dim(W)$ ואם $T(v_1)=0$, אז ייתכן מקרה שבו $T$ חח"ע.

ב. אם $\dim(V)>\dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל.

**9)** נתונה העתקה ליניארית $T:V\to W$.

$\{v_1,v_2...,v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- $V$.

הוכח או הפרך:

א. אם $T$ חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- $W$.

ב. אם הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- $W$, אז $T$ חח"ע.

**10)** נתונה העתקה ליניארית $T:R^n\to R^m$.

הוכח או הפרך:

א. אם $T$ היא איזומורפיזם אז $m=n$.

ב. אם $m>n$, אז $T$ חח"ע.

ג. אם $T(v)=Av$ לכל $v$, אז למטריצה $A$ יש $n$ שורות ו- $m$ עמודות.

**11)** נתונה העתקה ליניארית $T:V\to V$, המקיימת $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Ker}(T)$.

הוכח או הפרך:

א. אם $T$ על, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ב. אם $T$ חח"ע, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ג. $T$ היא איזומורפיזם.

ד. $T$ היא העתקת האפס.

**12)** נתונה העתקה ליניארית $T:R^n\to R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m\times n}$,

כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.

הוכח או הפרך:

א. אם $v\in\mathrm{Ker}(T)$, אז $v\in\mathrm{rowsp}(A)$.

ב. אם $v\in\mathrm{rowsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Ker}(T)$.

ג. אם $v\in\mathrm{colsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Im}(T)$.

ד. אם $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$, אז $n<m$.

**13)** נתונה העתקה ליניארית $T:R^n \to R^n$, ונתונה מטריצה $A$,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכח את הטענות הבאות:

א. אם $\operatorname{rank}(A)=n$, אז $T$ חח"ע.

ב. אם $\operatorname{rank}(A)=n$, אז $T$ על.

ג. אם $T^2(v)=0$, אז $\operatorname{Im}(T)\subseteq \operatorname{Ker}(T)$.

ד. אם $T^2(v)=0$, אז $\operatorname{rank}(A)\le \frac{n}{2}$.

**14)** נתונה העתקה ליניארית $T:P_3[R]\to R$, המוגדרת על ידי $T(p(x))=p(1)$.

א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענה על הסעיפים הקודמים עבור $T:P_n[R]\to R$.

**15)** נתונה העתקה ליניארית $T:M_n[R]\to M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A)=A^T$.

א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצא את ההעתקה ההפוכה של $T$.

## תשובות סופיות

1) חח״ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}(x+y-2z),\frac{1}{3}(2y-z-x),\frac{1}{3}(z+x+y)\right)$$

2) לא חח״ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

3) חח״ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a,b,c)=0.4a+0.6b+0.2c+(-0.4a+0.4b+0.2c)x+(-0.4c-0.2b+0.2a)x^2$$

4) חח״ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$$

5) לא.

6) הוכחה.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

14) א. $\operatorname{Ker}(T)=span\{-1+x,-1+x^2,-1+x^3\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=3$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

ב. לא חח״ע, כן על.

ג. $\operatorname{Ker}(T)=span\{-1+x,-1+x^2,\dots,-1+x^n\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=n$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

לא חח״ע, כן על.

15) א. $\operatorname{Im}(T)=M_n[R]$, ב. $\operatorname{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\}$. חח״ע ועל. ג. $T^{-1}(A)=A^T$

# פעולות עם העתקות ליניאריות

## שאלות

בשאלות **1-9**, תהיינה $S:R^3 \to R^2$ ו- $T:R^3 \to R^3$ העתקות ליניאריות המוגדרות על ידי: $S(x,y,z)=(x-z,y)$ , $T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$.

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

**1)** $S+T$ **2)** $4S$ **3)** $4S-10T$ **4)** $TS$ **5)** $ST$

**6)** $T^2$ **7)** $T^{-1}$ **8)** $T^{-2}$ **9)** $S^2$

## תשובות סופיות

**1)** לא ניתן להגדיר.

**2)** $4S=4(x-z,y)$

**3)** לא ניתן להגדיר.

**4)** לא ניתן להגדיר.

**5)** $ST:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ; $St(x,y,z)=(z-4y,4x-y)$

**6)** $T^2(x,y,z)=(x,y,16x-8y+z)$

**7)** $T^{-1}(x,y,z)=(x,4x,-y,17x-4y-z)$

**8)** $T^{-2}(x,y,z)=(x,y,-16x+8y+z)$

**9)** לא ניתן להגדיר.