

מבוא מתמטי לפיסיקאים 2

פרק 15 - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

1. העתקות ליניאריות..... 1
2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות..... 3
3. העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם..... 6
4. פעולות עם העתקות ליניאריות..... 10

העתקות לינאריות

שאלות

בשאלות 1-15, קבע, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה לינארית:

$$T(x, y) = (x + y, x - y) ; T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z) ; T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|) ; T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

$$T(x, y) = (xy, y, z) ; T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z) ; T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

$$(B \in M_n[\mathbb{R}]) \quad T(A) = BA + AB ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (6)$$

$$T(A) = A + A^T ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (7)$$

$$T(A) = |A| \cdot I ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (8)$$

$$T(A) = A \cdot A^T ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (9)$$

$$T(A) = A^{-1} ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (10)$$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 ; T : P_3[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}] \quad (11)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) ; T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (12)$$

$$T(p(x)) = p'(x) + p''(x) ; T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (13)$$

$$T(p(x)) = p^2(x) ; T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_{2n}[\mathbb{R}] \quad (14)$$

$$(F = \mathbb{C}, F = \mathbb{R}) \quad T(z) = \bar{z} ; T : C[F] \rightarrow C[F] \quad (15)$$

16 עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה לינארית:

$$? T(x, y) = (m^2 x^{2m}, y^{2m} + x) ; T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

בשאלות **17-20**, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

17 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש- $T(1,1,0) = (1,2,3)$, $T(0,1,1) = (4,5,6)$, $T(0,0,1) = (7,8,9)$

18 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש- $T(1,0,1) = (1,1,0)$, $T(0,1,1) = (1,2,1)$, $T(0,0,1) = (0,1,1)$

19 $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש-

$$. T(1,2,-1,0) = (0,1,-1), T(-1,0,1,1) = (1,0,0), T(0,4,0,2) = (2,2,-2)$$

20 $T: P_2[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}]$ כך ש- $T(1) = 4$, $T(4x + x^2) = x$, $T(1-x) = x^2 + 1$

$$T(1,0,0) = (a_1, a_2, a_3)$$

21 נתונה העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, המקיימת:

$$T(0,1,0) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$T(0,0,1) = (c_1, c_2, c_3)$$

א. הוכח שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי

$$. T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ב. נסח והוכח טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

22 נתונה העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$

הוכח או הפרך:

א. אם $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

תשובות סופיות

1) כן	2) כן	3) לא	4) לא	5) כן
6) כן	7) כן	8) לא	9) לא	10) לא
11) כן	12) כן	13) כן	14) לא	15) לא
16) כן	17) כן	18) כן	19) כן	20) כן
21) הוכחה.	22) הוכחה.			

גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-6, מצא:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t), \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z), \quad T: R^3 \rightarrow R^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A, \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R] \quad (4)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x+4), \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (5)$$

$$D(p(x)) = p'(x), \quad D: P_3[R] \rightarrow P_3[R] \quad (6)$$

(7) מצא העתקה ליניארית $T: R^3 \rightarrow R^3$,
 אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4, 1, 4), (-1, 4, 1)\}$.

(8) מצא העתקה ליניארית $T: R^4 \rightarrow R^3$,
 אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}$.

נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow U$.

(9) הוכח כי אם $\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Ker}(T)$ אז הממד של V זוגי.

(10) הוכח או הפרך:

א. קימת העתקה ליניארית $T: R^5 \rightarrow R^5$ שעבורה $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$.

ב. קימת העתקה ליניארית $T: R^4 \rightarrow R^4$ שעבורה $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$.

11 ידוע שהעתקה לינארית $T: V \rightarrow W$, מקיימת: $\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Ker}(T)$, $\dim(W) = 4$.
 מי מבין הבאים יכול להיות הממד של V ?

א. 10

ב. 9

ג. 7

ד. 6

ה. כל התשובות לא נכונות.

12 הוכח או הפרך:א. לכל העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ מתקיים $\text{Im}(T^2) \subseteq \text{Im}(T)$.ב. לכל העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ שמקיימת:

$$T = T^2, \text{Im}(T) = \text{Im}(T^2), \text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^2)$$

ג. לכל העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$, המקיימת $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$,אז בהכרח $T = 0$.**13** מטריצה $A_{m \times n}$ מגדירה העתקה $T: R^n \rightarrow R^m$; $T(x) = Ax$,ואילו $A_{n \times m}^T$ מגדירה העתקה $S: R^m \rightarrow R^n$; $S(y) = A^T y$.הראה כי $\text{Im}(T) = (\text{Ker}(S))^\perp$.

תשובות סופיות

(1) גרעין – בסיס : $\{(0,0,1,4)\}$, מימד : 1 . תמונה – כל בסיס של \mathbb{R}^3 , מימד : 3 .

(2) גרעין – בסיס : $\{(0,0,0)\}$, מימד : 0 .

תמונה – בסיס : $\{(1,1,0,1), (0,5,1,4), (0,0,-6,21)\}$, מימד : 3 .

(3) גרעין – בסיס : $\{(1,-2,1,0), (-7,3,0,1)\}$, מימד : 2 .

תמונה – בסיס : $\{(1,1,2), (0,1,2)\}$, מימד : 2 .

(4) גרעין – בסיס : $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, מימד : 2 .

תמונה – בסיס : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, מימד : 2 .

(5) גרעין – בסיס : $\{p(x)=1\}$, מימד : 1 .

תמונה – בסיס : $\{p(x)=2x+5, p(x)=1\}$, מימד : 2 .

(6) גרעין – בסיס : $\{p(x)=1\}$, מימד : 1 .

תמונה – בסיס : $\{p(x)=x^2, p(x)=x, p(x)=1\}$, מימד : 3 .

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$T(x, y, z, t) = (-x - y + z, -2x - y + t, 0) \quad (8)$$

(9) הוכחה.

(10) לא.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-4, קבע האם היא חח"ע,¹ האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה. כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצא אותה.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, z - x) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b, b - 2c) \quad , \quad T: P_2[R] \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3 \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow P_3[R] \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית } T: R^4 \rightarrow R^3 ?$$

$$(6) \quad \text{נתונה העתקה לינארית } T: U \rightarrow V \text{ הוכח:}$$

- א. אם $\dim(U) < \dim(V)$, אז T לא על.
 ב. אם $\dim(U) > \dim(V)$, אז T לא חח"ע.
 ג. אם $\dim(U) = \dim(V)$, אז T חח"ע $\Leftrightarrow T$ על.

$$(7) \quad \text{נתונה העתקה לינארית } T: V \rightarrow W \text{ הוכח או הפרך:}$$

- א. אם $\dim \text{Ker}(T) \neq 0$, אז ההעתקה T אינה על.
 ב. אם $\dim \text{Ker}(T) = 0$ ו- $\dim(V) \leq \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
 ג. אם $\dim \text{Ker}(T) = 0$ ו- $\dim(V) \geq \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
 ד. אם $\dim(V) < \dim(W)$, אז ההעתקה T חח"ע.

¹ הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

(8) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$; $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V .
הוכח או הפרך:

- א. אם $\dim(V) > \dim(W)$ ואם $T(v_1) = 0$, אז ייתכן מקרה שבו T חח"ע.
ב. אם $\dim(V) > \dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל.

(9) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$.
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- V .
הוכח או הפרך:

- א. אם T חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל ב- W .
ב. אם הקבוצה $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל ב- W , אז T חח"ע.

(10) נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^m$.
הוכח או הפרך:

- א. אם T היא איזומורפיזם אז $m = n$.
ב. אם $m > n$, אז T חח"ע.
ג. אם $T(v) = Av$ לכל v , אז למטריצה A יש n שורות ו- m עמודות.

(11) נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$, המקיימת $\text{Im}(T) = \text{Ker}(T)$.
הוכח או הפרך:

- א. אם T על, אז בהכרח $V = \{0\}$.
ב. אם T חח"ע, אז בהכרח $V = \{0\}$.
ג. T היא איזומורפיזם.
ד. T היא העתקת האפס.

(12) נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m \times n}$,
כך ש- $T(v) = Av$ לכל $v \in R^n$.
הוכח או הפרך:

- א. אם $v \in \text{Ker}(T)$, אז $v \in \text{rowsp}(A)$.
ב. אם $v \in \text{rowsp}(A)$, אז $v \in \text{Ker}(T)$.
ג. אם $v \in \text{colsp}(A)$, אז $v \in \text{Im}(T)$.
ד. אם $\text{Ker}(T) = \{0\}$, אז $n < m$.

13 נתונה העתקה ליניארית $T: R^n \rightarrow R^n$, ונתונה מטריצה A ,

כך ש- $T(v) = Av$, לכל $v \in R^n$.

הוכח את הטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A) = n$, אז T חח"ע.

ב. אם $\text{rank}(A) = n$, אז T על.

ג. אם $T^2(v) = 0$, אז $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$.

ד. אם $T^2(v) = 0$, אז $\text{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$.

14 נתונה העתקה ליניארית $T: P_3[R] \rightarrow R$, המוגדרת על ידי $T(p(x)) = p(1)$.

א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענה על הסעיפים הקודמים עבור $T: P_n[R] \rightarrow R$.

15 נתונה העתקה ליניארית $T: M_n[R] \rightarrow M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A) = A^T$.

א. מצא את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבע האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצא את ההעתקה ההפוכה של T .

תשובות סופיות

(1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}(x + y - 2z), \frac{1}{3}(2y - z - x), \frac{1}{3}(z + x + y) \right)$$

(2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

(3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(a, b, c) = 0.4a + 0.6b + 0.2c + (-0.4a + 0.4b + 0.2c)x + (-0.4c - 0.2b + 0.2a)x^2$$

(4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} b + c - d & -a + b + c - d \\ b - d & d \end{pmatrix}$$

(5) לא.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

(14) א. $\text{Ker}(T) = \text{span}\{-1 + x, -1 + x^2, -1 + x^3\}$, $\dim \text{Ker}(T) = 3$

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{1\}, \dim \text{Im}(T) = 1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

ג. $\text{Ker}(T) = \text{span}\{-1 + x, -1 + x^2, \dots, -1 + x^n\}$, $\dim \text{Ker}(T) = n$

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{1\}, \dim \text{Im}(T) = 1$$

לא חח"ע, כן על.

(15) א. $\text{Im}(T) = M_n[\mathbb{R}]$, $\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}$. ב. חח"ע ועל. ג. $T^{-1}(A) = A^T$

פעולות עם העתקות לינאריות

שאלות

בשאלות 1-9, תהינה $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ו- $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי: $S(x, y, z) = (x - z, y)$, $T(x, y, z) = (x, 4x - y, x + 4y - z)$.

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

- | | | | | |
|----------|-----------|----------------|--------------|-------------|
| ST (5) | TS (4) | $4S - 10T$ (3) | $4S$ (2) | $S + T$ (1) |
| | S^2 (9) | T^{-2} (8) | T^{-1} (7) | T^2 (6) |

תשובות סופיות

- (1) לא ניתן להגדיר.
- (2) $4S = 4(x - z, y)$
- (3) לא ניתן להגדיר.
- (4) לא ניתן להגדיר.
- (5) $ST(x, y, z) = (z - 4y, 4x - y)$; $ST: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- (6) $T^2(x, y, z) = (x, y, 16x - 8y + z)$
- (7) $T^{-1}(x, y, z) = (x, 4x - y, 17x - 4y - z)$
- (8) $T^{-2}(x, y, z) = (x, y, -16x + 8y + z)$
- (9) לא ניתן להגדיר.