

## מתמטיקה 2

פרק 3 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

1. תחום הגדרה של פונקציה ..... 1
2. הרכבת פונקציות ..... 3
3. הפונקציה ההפוכה ..... 6
4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית ..... 10
5. פונקציה מחזורית ..... 12
6. פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית ..... 15
7. תרגילים משולבים ..... 16

## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x - 4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2 + x + 1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x + 4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x + 4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x + 1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x - 4) \quad (17)$$

**תשובות סופיות**

**(1)** כל  $x$ .

**(2)**  $x \neq \pm 2$

**(3)** כל  $x$ .

**(4)**  $x \neq 0, 1, -1$

**(5)**  $x \neq 2, -1$

**(6)**  $x \geq 4$

**(7)**  $x \leq -2, x \geq 1$

**(8)** כל  $x$ .

**(9)**  $-1 < x < 1$

**(10)**  $x < -2, x > 1$

**(11)**  $x > 0, x \neq 1$

**(12)** כל  $x$ .

**(13)**  $x > 0, x \neq 1$

**(14)**  $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

**(15)**  $x \neq \frac{\pi k}{4}$

**(16)** כל  $x$ .

**(17)**  $3 < x < 5$

**(18)**  $-2 < x < 0$

## הרכבת פונקציות

### שאלות

(1) נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = x - 4$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $h(x) = \frac{4}{x}$ .

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות:

א.  $f(g(1))$       ב.  $h(g(f(5)))$       ג.  $f(g(x))$   
 ד.  $h(f(x))$       ה.  $f(f(x))$       ו.  $h(h(x))$

(2) נתון:  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ .

חשב  $f(f(x))$  עבור  $x=3$ .

(3) נתון:  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$ .

חשב  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x=8$ .

(4) נתון:  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$ .

חשב  $f(g(x))$  עבור  $x = e^2$ .

(5) נתון:  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$ .

חשב  $f(g(x))$  עבור  $x=2$ .

(6) נתון:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$ .

חשב  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$ .

(7) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

מצא נוסחה עבור ההרכבה  $z(x) = g(f(x))$ .

(8) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצא נוסחה עבור ההרכבה  $h(x) = f(g(x))$ .

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$  ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בוודאות?

1.  $n \leq -3$

2.  $n \geq 1$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

(9) נתון  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצא את  $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ Times}}$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad \frac{69}{13}$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$n \leq -3 \quad \text{ב.} \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$f(x) = x^2 - 4, \quad x \geq 0 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצא את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}. \text{ האם הפונקציה היא חח"ע?}$$

מצא את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבע האם היא פונקציה על:

$$א. \quad f(x) = \frac{x-1}{3}; \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$ב. \quad f(x) = \frac{x+1}{x}; \quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$ג. \quad f(x) = \frac{3x-2}{x-2}; \quad f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$ד. \quad f(x) = x^2 - 4; \quad f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

**13** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבע האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad \text{ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1] \quad \text{ג.}$$

**14** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהא  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.

ב. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.

ג. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  על.

ד. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.

ה. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.

ו. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  על.

ז. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.

ח. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.

**15** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהא  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . נתון כי  $h$  על.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $f$  חח"ע.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $g$  על.

**16** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהא  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ .

נתון כי  $h$  חח"ע.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $g$  על.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $f$  חח"ע.

## תשובות סופיות

- (1)  $f^{-1}(x) = 3x + 1$ , כל  $y$ .
- (2)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $y \neq 1$ .
- (3)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ ,  $y \neq 3$ .
- (4)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $y \geq -4$ .
- (5) לא חח"ע. תמונה:  $y \leq -2$  או  $y \geq 2$ .
- (6) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq -\frac{1}{4}$ .
- (7) לא חח"ע. תמונה  $0 \leq y \leq 1$ .
- (8) כן חח"ע. תמונה:  $y > 0$ . פונקציה הפוכה:  $x > 0$ ,  $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .
- (9) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2.3$  או  $y \leq -1.3$ .
- (10) כן חח"ע. תמונה:  $y \neq 1$ . פונקציה הפוכה:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$ .
- (11) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה:  $\mathbb{R}$ ; על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; לא על.  
 ג. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , טווח ותמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; על.  
 ד. תחום הגדרה  $[0, \infty)$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $[-4, \infty)$ ; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח:  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(0, 1]$ ; לא על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה:  $(0, 1]$ ; על.  
 ג. תחום הגדרה  $(1, \infty]$ , טווח  $(0, 1]$ , תמונה:  $(0, 0.5)$ ; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

## פונקציה זוגית ואי זוגית

### שאלות

מצא איזה מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי זוגיות ואיזה זוגיות:

$$y = 1 \quad (3) \qquad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \qquad y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = 2^x \quad (6) \qquad y = x^2 + \sin^2 x \quad (5) \qquad y = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8) \qquad y = \ln x + x^2 \quad (7)$$

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } k(x) = -f(x), \quad z(x) = f(x^2)$$

בדוק, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ופונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } k(x) = -f(x^3) \text{ ו- } z(x) = -g(x^3)$$

טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.

טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(11) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ונתונה פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{נסמן: } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4)$$

בדוק, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(12) הוכח כי:

- א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**תשובות סופיות**

שאלות 1-8 : זוגית : 2,3,5,8 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 6,7.

(9)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(10) טענה ב'.

(11)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(12) שאלת הוכחה.

## פונקציה מחזורית

### שאלות

מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-20 :

$$y = 1 + 14 \cos 20x \quad (2)$$

$$y = 1 + 10 \sin(0.5x + 4) \quad (1)$$

$$y = -1 + 14 \sec 2x \quad (4)$$

$$y = -4 + 20 \tan 4x \quad (3)$$

$$y = \cos^2 2x \quad (6)$$

$$y = \sin^2 4x \quad (5)$$

$$y = (\sin x + \cos x)^2 \quad (8)$$

$$y = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (7)$$

$$y = \cot^2 x \quad (10)$$

$$y = \cos^4 x + \sin^4 x \quad (9)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x \quad (12)$$

$$y = \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{10} \quad (11)$$

$$y = \cos 2x \cos x \quad (14)$$

$$y = \sin 4x + \sin 14x + \sin x \quad (13)$$

$$y = \sin^4 x \quad (16)$$

$$y = \sin^3 x \quad (15)$$

$$y = |\sin x| \quad (18)$$

$$y = \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} \quad (17)$$

$$y = \cot x - \tan x \quad (20)$$

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x \quad (19)$$

הוכח שהפונקציות בשאלות 21-26 אינן מחזוריות :

$$y = x \sin x \quad (23)$$

$$y = x + \cos x \quad (22)$$

$$y = x + \sin x \quad (21)$$

$$y = \cos 5x + \cos \sqrt{5x} \quad (26)$$

$$y = \frac{\sin x}{x} \quad (25)$$

$$y = x^2 \cos x \quad (24)$$

הערה : בשאלות 21 ו-22 נדרש ידע בחקירת פונקציה.

(27) הוכח :

אם  $f(x)$  מחזורית בעלת מחזור  $p$ ,

אז  $y = a + b \cdot f(cx + d)$  מחזורית בעלת מחזור  $\frac{p}{c}$ .

(28) הוכח : אם  $T$  הוא מחזור של  $f(x)$ , אז לכל  $n$  שלם  $f(x + nT) = f(x)$ .

**(29)** נתון כי  $f, g$  מוגדרות לכל  $x$  ובעלת מחזור  $p_1, p_2$ , בהתאמה.

נתון כי היחס  $\frac{p_1}{p_2}$  הוא מספר רציונלי.

הוכח כי גם הפונקציות  $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ) הן מחזוריות.

**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x - [x]$ .

א. שרטט את גרף הפונקציה.

ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?

ג. הוכח את תשובתך מסעיף ב.

**(31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[0,1]$ .

צייר את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית  $g(x)$ , המוגדרת לכל  $x$ ,

שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  בקטע  $[0,1]$ , ורשום נוסחה עבור  $f$ .

**(32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0,1]$ .

צייר את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית  $g(x)$ , המוגדרת לכל  $x$ ,

שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם  $f(x)$  ב- $[0,1]$ , ורשום נוסחה עבור  $g$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $4\pi$       (2)  $\frac{\pi}{10}$       (3)  $\frac{\pi}{4}$       (4)  $\pi$       (5)  $\frac{\pi}{4}$
- (6)  $\frac{\pi}{2}$       (7)  $\pi$       (8)  $\pi$       (9)  $\frac{\pi}{2}$       (10)  $\pi$
- (11)  $40\pi$       (12)  $\pi$       (13)  $2\pi$       (14)  $2\pi$       (15)  $2\pi$
- (16)  $\pi$       (17)  $\pi$       (18)  $\pi$

(19) הפונקציה היא למעשה  $y = 1$ , כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית. כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

$$\frac{\pi}{2} \quad (20)$$

(21) הוכחה.

(22) הוכחה.

(23) הוכחה.

(24) הוכחה.

(25) הוכחה.

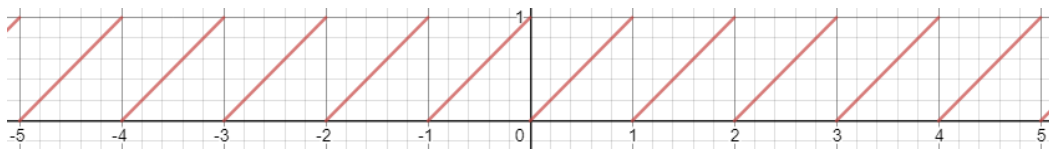
(26) הוכחה.

(27) הוכחה.

(28) הוכחה.

(29) הוכחה.

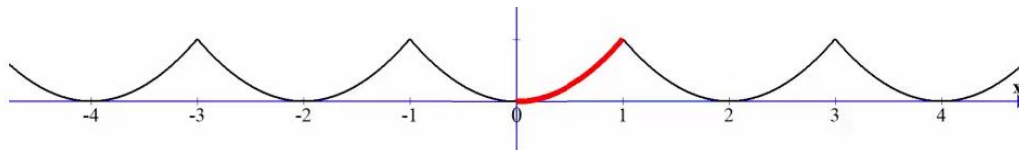
(30) א.



ב. 1 ג. הוכחה.

(31)  $g(x) = x - k$ , עבור  $k$  שלם, זוגי.

(32)  $g(x) = (x - k)^2$ , עבור  $k$  שלם, זוגי.



## פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

### שאלות

רשום כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטט את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשב  $f(1)$ ,  $f(4)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(7)$ .

ב. שרטט את גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

### תשובות סופיות

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{א. } f(1) = 1, f(4) = 16, f(-4) = 4, f(0) = 0, f(7) = \text{undefind}$$

ב. ג. הפונקציה כללית.



## תרגילים משולבים

### שאלות

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases} \quad (1)$$

שרטט את הפונקציה, וקבע האם היא :

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על  $\mathbb{R}$ .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבע האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

**(3)** נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $k(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ב':  $z(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ג':  $h(x) = k(x)z(x)$  זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

**(4)** נתונות שתי פונקציות,  $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

נתון ש- $f$  מונוטונית עולה ממש, ואילו  $g$  מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

תהי  $h(x) = f(g(x))$ .

איזו טענה נכונה?

א.  $h$  יורדת חלש.

ב.  $h$  עולה ממש.

ג.  $h$  עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד.  $h$  אינה חסומה בהכרח.

$$\text{(5) נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

תהי  $h(x) = f(g(x))$ .

א. מצא את  $h$  בקטע  $[-2,0)$ .

ב. קבע האם  $h$  חח"ע בקטע  $[-2,0)$ .

ג. קבע האם  $h$  חסומה בקטע  $[-2,0)$ .

ד. קבע האם  $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$  היא על.

\* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

**(6)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ .

קבע מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה  $h(x) = f(g(x))$  היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = -\lfloor x \rfloor$ .

א. בדוק את מונוטוניות  $z(x) = f(g(x))$ .

ב. בדוק את מונוטוניות  $k(x) = g(f(x))$ .

ג. בדוק האם  $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$  חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם  $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$  אז הפונקציה  $f$  יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$   
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. הפונקציה  $f$  עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה  $g$  עולה ממש וחח"ע.

9 מצא את הפונקציה ההפוכה לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,

וקבע את תחום הגדרתה.

הוכח שהפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

הערה: הפונקציה לעיל נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקור את מונוטוניות הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכח שהפונקציה חסומה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

## תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.  
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א.  $h(x) = x^2$ .  
ב. הפונקציה חח"ע בקטע.  
ג. הפונקציה חסומה בקטע.  
ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה.  
ג. הפונקציה לא חח"ע.  
ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.  
ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה  $z(x)$  יורדת חלש.  
ג. הפונקציה חסומה.  
ב. הפונקציה  $k(x)$  יורדת חלש.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9)  $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ; תחום הגדרתה: כל  $x$ .
- (10) ראו באתר.
- (11) א.  $-1 \leq x \leq 2$ .  
ב.  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ .  
ג. שאלת הוכחה.  
ד.  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  עלייה,  $\frac{1}{2} < x \leq 2$  ירידה.