אנליזת פורייה

פרק 4 - התמרת פורייה ב L^2, משפט הדגימה של שאנון וקירוב יחידה

תוכן העניינים

1. התמרת פורייה ב L^2 1
2. משפט הדגימה של שאנון 2
3. קירוב יחידה 3

התמרת פורייה ב-L2:

שאלה:

1) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ במובן L^2 .

תשובה סופית:

1) $$F\left\{\frac{\sin(x)}{x}\right\}_{L_2}=\begin{cases}\frac{1}{2} & |\omega|<1\\ 0 & else\end{cases}$$

משפט הדגימה של שאנון:

שאלות:

1) נגדיר $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2} & x\neq 0\\ \pi^2 & x=0\end{cases}$.

ראינו בעבר כי התמרת הפורייה שלה הינה: $f(\omega)=\begin{cases}\pi+\omega & -\pi\le\omega\le 0\\ \pi-\omega & 0\le\omega\le\pi\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את טור הפורייה המוכלל של $f(x)$ ביחס למערכת $\left\{\dfrac{\sin(\pi x-\pi n)}{(\pi x-\pi n)}\right\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$.

2) נגדיר $f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\pi^2-3\omega^2\right)e^{i\omega x}d\omega$.

מצאו את טור פורייה מוכלל של $f(x)$ ביחס למערכת $\left\{\dfrac{\sin(\pi x-\pi n)}{\pi x-\pi n}\right\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$.

תשובות סופיות:

1) $f(x)\sim\pi^2\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{n=\infty}\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2}\dfrac{\sin(\pi x-\pi n)}{(\pi x-\pi n)}$

2) $f(x)\sim\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\dfrac{12\pi(-1)^{n+1}}{n^2}\cdot\dfrac{\sin(\pi x-\pi n)}{\pi x-\pi n}$

קירוב יחידה:

שאלות:

1) הראו כי אם $\psi(x)$ מקיימת את התכונות:

א. $\psi(x)\geq 0$ לכל x.

ב. $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx=1$.

אזי $K_n(x)=n\cdot\psi(nx)$ הינו גרעין יחידה.

2) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(nx-n\pi)}{n(x-\pi)^2}arctg\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{3}}\right)dx$.

הערה: ניתן להיעזר בעובדה כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

3) הראו כי אם $f(x)$ רציפה וחסומה על R ואם פונקציית הנגזרת $f'(x)$ גם רציפה וחסומה על R אזי מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}se^{-\frac{n^2s^2}{2}}f(s)ds=f'(0)$.

4) תהי $\varphi(x)$ פונקציה המוגדרת על ידי הישר הממשי, רציפה וחסומה שם.
נניח כי $\varphi(x)$ גזירה ברציפות על הישר הממשי וכי $\varphi'(x)$ חסומה על הישר הממשי.

חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\left(1+n^2x^2\right)^2}\varphi(x)dx$.

5) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה, גזירה ברציפות למקוטעין וכי $f'(x)$ רציפה ב-$x=0$.

נגדיר $\varphi(x)=\frac{15}{16}\left(x^2-1\right)^2\chi_{(-1,1)}(x)$.

מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}n^2\varphi'(nx)f(x)dx$.

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נגדיר את הפונקציה $h_\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}$.

הראו כי משפחת הפונקציות $\{h_\lambda(x)\}_{\lambda\in(0,\infty)}$ מהווה קירוב יחידה כאשר $\lambda\to 0^+$.

ב. נסמן $H(t)=\frac{1}{2\pi}e^{-|t|}$. הראו כי מתקיים $\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda t)e^{itx}dt=h_\lambda(x)$.

ג. תהי $f\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$ פונקציה רציפה ונניח כי $f(\omega)\in L^1_{PC}(-\infty,\infty)$.

הראו כיצד מקבלים מסעיפים א', ב' את נוסחת ההתמרה

ההפוכה $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)e^{i\omega x}d\omega$.

הערה: הניחו כי מותר להכניס את הגבול אל תוך האינטגרל.

7) יהי $K_n(x)$ גרעין יחידה זוגי. תהי $\varphi(x)$ פונקציה המוגדרת על הישר הממשי, רציפה למקוטעין וחסומה שם.

הוכיחו כי בכל נקודה x_0 מתקיים $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(x_0-x)\varphi(x)dx=\frac{\varphi(x_0^+)+\varphi(x_0^-)}{2}$.

8) יהי $K_n(x)$ גרעין יחידה המקיים $\forall x\notin[-1,1]\to K_n(x)=0$. תהי $\varphi(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין על הישר הממשי, הרציפה בנקודה $x=0$.

הוכיחו כי מתקיים $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(0-x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$.

9) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n$ כאשר $a_n=\frac{3}{4}\lim_{L\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\left[-\frac{1}{L},\frac{1}{L}\right]}(m-x)\frac{L-L^3(m-x)^2}{x^2+x}dx$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) $-\frac{\pi}{6}$
3) הוכחה.
4) $\lim_{n\to\infty}\left(K_n * \varphi'\right)_{(0)} \xrightarrow{n\to\infty} \varphi'(0)$
5) $-f'(0)$
6) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) 1