

אנליזת פורייה

פרק 4 - התמרת פורייה ב L2, משפט הדגימה של שאנון וקירוב יחידה

תוכן העניינים

1. התמרת פורייה ב L2
2. משפט הדגימה של שאנון
3. קירוב יחידה

התמרת פורייה ב- L^2 :

שאלה:

(1) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ במובן L^2 .

תשובה סופית:

$$F\left\{\frac{\sin(x)}{x}\right\}_{L^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} & |\omega| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

משפט הדגימה של שאנון:

שאלות:

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2} & x \neq 0 \\ \pi^2 & x = 0 \end{cases} \quad \text{נגדיר}$$

$$f(\omega) = \begin{cases} \pi + \omega & -\pi \leq \omega \leq 0 \\ \pi - \omega & 0 \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ראינו בעבר כי התמרת הפורייה שלה הינה:}$$

$$\left\{ \frac{\sin(\pi x - \pi n)}{(\pi x - \pi n)} \right\}_{n=-\infty}^{n=\infty} \quad \text{מצאו את טור הפורייה המוכלל של } f(x) \text{ ביחס למערכת}$$

$$(2) \quad f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 3\omega^2) e^{i\omega x} d\omega \quad \text{נגדיר}$$

$$\left\{ \frac{\sin(\pi x - \pi n)}{\pi x - \pi n} \right\}_{n=-\infty}^{n=\infty} \quad \text{מצאו את טור פורייה מוכלל של } f(x) \text{ ביחס למערכת}$$

תשובות סופיות:

$$f(x) \sim \pi^2 \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{n=\infty} \frac{4 \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2} \frac{\sin(\pi x - \pi n)}{(\pi x - \pi n)} \quad (1)$$

$$f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{12\pi(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot \frac{\sin(\pi x - \pi n)}{\pi x - \pi n} \quad (2)$$

קירוב יחידה:

שאלות:

(1) הראו כי אם $\psi(x)$ מקיימת את התכונות:

א. $\psi(x) \geq 0$ לכל x .

ב. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 1$.

אזי $K_n(x) = n \cdot \psi(nx)$ הינו גרעין יחידה.

(2) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(nx - n\pi)}{n(x - \pi)^2} \arctg\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{3}}\right) dx$

הערה: ניתן להיעזר בעובדה כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

(3) הראו כי אם $f(x)$ רציפה וחסומה על R ואם פונקציית הנגזרת $f'(x)$ גם רציפה

וחסומה על R אזי מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} se^{-\frac{n^2 s^2}{2}} f(s) ds = f'(0)$

(4) תהי $\varphi(x)$ פונקציה המוגדרת על ידי הישר הממשי, רציפה וחסומה שם. נניח כי $\varphi(x)$ גזירה ברציפות על הישר הממשי וכי $\varphi'(x)$ חסומה על הישר הממשי.

חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1 + n^2 x^2)^2} \varphi(x) dx$

(5) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה, גזירה ברציפות למקוטעין וכי $f'(x)$ רציפה ב- $x=0$.

נגדיר $\varphi(x) = \frac{15}{16} (x^2 - 1)^2 \chi_{(-1,1)}(x)$

מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} n^2 \varphi'(nx) f(x) dx$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נגדיר את הפונקציה
$$h_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{x^2 + \lambda^2}$$

הראו כי משפחת הפונקציות $\{h_\lambda(x)\}_{\lambda \in (0, \infty)}$ מהווה קירוב יחידה כאשר $\lambda \rightarrow 0^+$.

ב. נסמן $H(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-|t|}$. הראו כי מתקיים
$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) e^{itx} dt = h_\lambda(x)$$

ג. תהי $f \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$ פונקציה רציפה ונניח כי $f(\omega) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$. הראו כיצד מקבלים מסעיפים א', ב' את נוסחת ההתמרה

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

הערה: הניחו כי מותר להכניס את הגבול אל תוך האינטגרל.

(7) יהי $K_n(x)$ גרעין יחידה זוגי. תהי $\varphi(x)$ פונקציה המוגדרת על הישר הממשי, רציפה למקוטעין וחסומה שם.

הוכיחו כי בכל נקודה x_0 מתקיים
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x_0 - x) \varphi(x) dx = \frac{\varphi(x_0^+) + \varphi(x_0^-)}{2}$$

(8) יהי $K_n(x)$ גרעין יחידה המקיים $\forall x \notin [-1, 1] \rightarrow K_n(x) = 0$. תהי $\varphi(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין על הישר הממשי, הרציפה בנקודה $x = 0$.

הוכיחו כי מתקיים
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(0 - x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

(9) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ כאשר
$$a_n = \frac{3}{4} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \int_{-\frac{1}{L}}^{\frac{1}{L}} \chi_{\left[-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right]}(m-x) \frac{L - L^3(m-x)^2}{x^2 + x} dx$$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) $-\frac{\pi}{6}$

(3) הוכחה.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (K_n * \varphi')_{(0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi'(0)$ (5) $-f'(0)$

(6) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

(9) 1