מבוא להסתברות

פרק 39 - התפלגות ארלנג(גמא)

תוכן העניינים

התפלגות ארלנג:

רקע:

התפלגות זו הינה התפלגות רציפה התלויה בשני פרמטרים: k ו-λ.
$X \sim Erlang(k,\lambda)$.
הפרמטר k הוא מספר שלם וחיובי פרמטר זה גם נקרא פרמטר הצורה.
הפרמטר λ הוא פרמטר ממשי וחיובי שנקרא פרמטר הקצב.
תחום ההגדרה של ההתפלגות הוא $X \ge 0$.
בהנחה ולפנינו תהליך עם זרם פואסוני הזמן הדרוש עד הופעת האירוע ה-k מרגע מסוים מתפלג התפלגות ארלנג כאשר הפרמטר λ מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן.

דוגמה:

מספר הפניות למוקד מתפלג פואסונית עם קצב של 3 פניות לדקה.
מהי ההתפלגות של הזמן שעובר מרגע פתיחת המוקד ועד קבלת הפניה הרביעית?

$W_i \sim P(\lambda=3)$ - מספר הפניות למוקד בדקה.
$k=4$
$X \sim Erlang(4,3)$ - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

פונקציית הצפיפות של X בהתפלגות ארלנג: $f(x)=\dfrac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות: $F(t)=P(X\le t)=1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}\cdot(\lambda t)^i\cdot e^{-\lambda t}$.

בהמשך לדוגמה:

מה ההסתברות שמרגע פתיחת המוקד יעברו פחות מ-2 דקות עד שהפניה הרביעית תתקבל במוקד?

$X \sim Erlang(4,3)$ - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

$$P(X \le 2) = F(2) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} \cdot (3 \cdot 2)^i \cdot e^{-3 \cdot 2} = 1 - e^{-6} \left(\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} \right) = 0.8488$$

התוחלת של ההתפלגות: $E(X) = \frac{k}{\lambda}$.

השונות של התפלגות: $V(X) = \frac{k}{\lambda^2}$.

בהמשך לדוגמה:

מהי התוחלת וסטיית התקן של הזמן שיחלוף מרגע פתיחת המוקד ועד שתתקבל הפניה הרביעית למוקד?

$X \sim Erlang(4,3)$ - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

$E(X) = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ דקות.

$V(X) = \sqrt{\frac{4}{3^2}} = \frac{2}{3}$ דקות.

אם: $X_1, X_2, ..., X_k$ משתנים מקריים מעריכיים בלתי תלויים כך ש-$X_i \sim \exp(\lambda)$

עבור כל: $1 \le i \le k$, אזי: $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim Erlang(k, \lambda)$.

בהמשך לדוגמה:

הראו את הקשר בין התפלגות ארלנג להתפלגות המעריכית בדוגמה המוצגת.

$X_i \sim \exp(\lambda)$ - הזמן בדקות בין פניה לפניה.

X_i - ב"ת.

$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, $k=4$.

X_1 - הזמן עד הפניה הראשונה.

X_2 - הזמן בין הפניה הראשונה לשנייה וכו'...

$\sum_{i=1}^{4} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \sim Erlang(k=4, \lambda=3)$ - הזמן הכולל עד הפניה הרביעית בדקות.

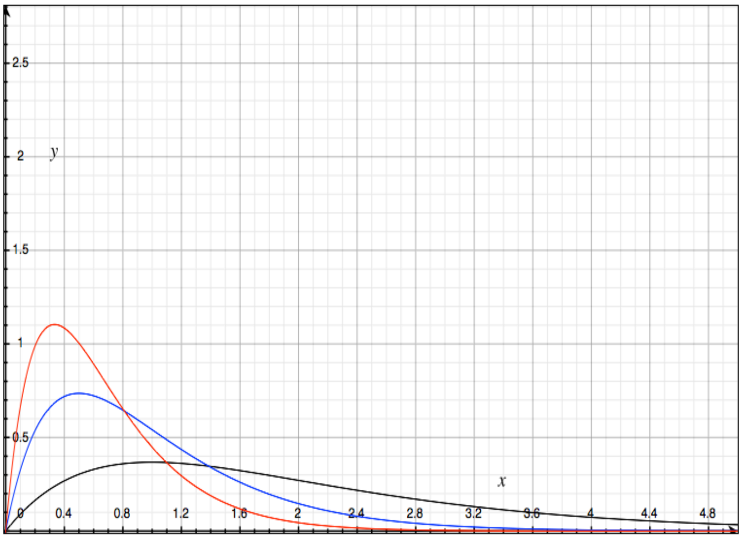
גרפים של פונקציית הצפיפות בהתפלגות ארלנג:

מקרא:
$k=2$

$\lambda=1$

$\lambda=2$

$\lambda=3$

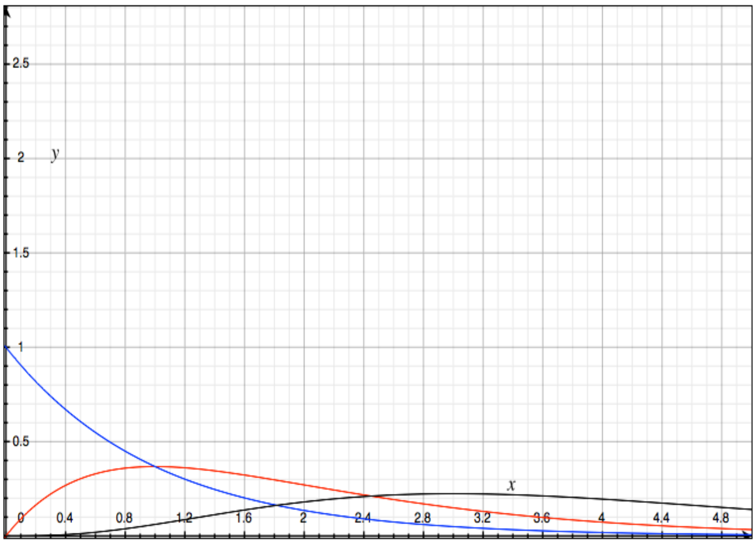


מקרא:
$\lambda=1$

$k=1$

$k=2$

$k=4$



שאלות:

1) נתון: $X \sim Erlang(2,5)$.

א. מצאו את: $P(X>3)$.

ב. מצאו את: $P(X>3|X>5)$.

ג. מצאו את: $E(X)$.

2) צריכת החשמל היומית בחברה מסוימת מתפלגת התפלגות ארלנג עם תוחלת 2 ושונות 2.

א. מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תעלה על 4?

ב. מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תעלה על 2 אך לא תהיה יותר מ-5?

ג. החברה עובדת 5 ימים בשבוע, מה תוחלת מספר הימים בשבוע בה צריכת החשמל היומית בחברה קטנה מ-4?

3) אורך החיים של סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 4 שעות באופן בלתי תלוי בסוללה אחרת. במכשיר מתקינים 4 סוללות. בכל רגע נתון רק סוללה אחת מפעילה את המכשיר. ברגע שסוללה מתרוקנת היא מוחלפת במיידית בסוללה אחרת עד אשר כל ארבע הסוללות מתרוקנות.

א. מה התוחלת והשונות של אורך חיי מערכת הסוללות במכשיר?

ב. מה ההסתברות שאורך חיי מערכת הסוללות במכשיר יהיה נמוך מיממה?

ג. מה ההסתברות שאורך חיי מערכת הסוללות במכשיר יהיה גדול מיומיים אם ידוע שהיה גדול מיממה?

4) מספר תקלות המחשב במערכת מתפלג פואסונית על קצב של 3 תקלות בשעה.

א. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה הראשונה יהיה קטן משעה?

ב. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השנייה יהיה קטן משעה?

ג. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השלישית יהיה קטן משעה?

ד. הסבירו את ההבדלים בין הסעיפים.

5) הוכיחו שאם: $X \sim Erlang(k,\lambda)$, אזי מתקיים ש- $E(X)=\frac{k}{\lambda}$, $V(X)=\frac{k}{\lambda^2}$.

רמז: היעזרו בקשר בין התפלגות ארלנג להתפלגות המעריכית.

6) פונקציית ההתפלגות המצטברת של התפלגות ארלנג הנה : $1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}\cdot(\lambda t)^i\cdot e^{-\lambda t}$.
הראו דרכה שפונקציית הצפיפות של ההתפלגות ארלנג היא : $f(x)=\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$.

תשובות סופיות:

1) א. 0.000005. ב. 1. ג. 0.4.

2) א. 0.0915. ב. 0.36558 ג. 4.5425.

3) א. תוחלת : 16 שעות, שונות : 64 ^{2} (שעות). ב. 0.8488. ג. 0.0023.

4) א. 0.9502. ב. 0.8009 ג. 0.5768.
ד. ראה סרטון.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.