

תורת ההסתברות

פרק 45 - התפלגות לוג נורמלית

תוכן העניינים

1. התפלגות לוג נורמלית 1

התפלגות לוג נורמלית:

רקע:

נניח שלמשתנה Y ישנה התפלגות נורמלית, כלומר: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

נגדיר כעת את $X = e^Y$.

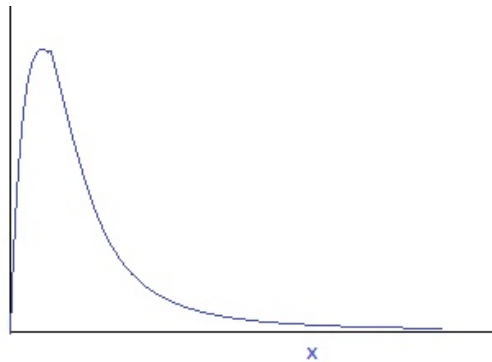
X הינו משתנה המתפלג לוג נורמלית.

הסיבה שקוראים להתפלגות באופן כזה היא ש- $\ln(X) = Y$ מתפלג נורמלית.

תחום ההגדרה של Y הינו $(-\infty, \infty)$ לעומת זאת תחום ההגדרה של X הינו $(0, \infty)$.

נסמן את ההתפלגות של X באופן הבא: $X \sim LOGN(\mu, \sigma^2)$.

בהתפלגות זו מתקיימים הקשרים הבאים: $E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$, $V(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$.



דוגמה (פתרון בהקלטה):

$X \sim LOGN(10, 2^2)$.

מצאו את האחוזון התשעים של ההתפלגות.

שאלות:

- (1) נתון: $X \sim \text{LOGN}(0, 1^2)$.
 א. מהי ההתפלגות של $\ln(X) = Y$?
 ב. מהו החציון של X ?
 ג. חשבו את $P(X > e)$.
- (2) נתון שהשכר במשק מתפלג לוג נורמלית, התוחלת של השכר היא 10 יחידות כסף עם שונות 2. נתבונן בהתפלגות $\ln$ השכר. כיצד מתפלג $\ln$ של השכר ומה התוחלת והשונות שלו?
- (3) הוכיחו שהחציון של: $X \sim \text{LOGN}(\mu, \sigma^2)$ הינו e^μ .
- (4) נתון ש- $X_i \sim \text{LOGN}(\mu, \sigma^2)$ לכל: $i = 1, 2, \dots, n$.
 כמו כן ידוע שהתצפיות הן בלתי תלויות זו בזו.
 הוכיחו: $\prod_{i=1}^n X_i \sim \text{LOGN}(n\mu, n\sigma^2)$.
- (5) אורך החיים של מכשיר מתפלג לוג נורמלית עם תוחלת של 6 שנים וסטיית תקן של 1.5 שנים.
 א. מצא את העשירון העליון של אורך חיי המכשיר.
 ב. מה ההסתברות שהמכשיר יחיה יותר מ-3 שנים?
- (6) שפנים מתרבים פי X_i בכול חודש. נתון ש- X_i מתפלג לוג נורמלית כאשר
 $E(X_i) = \sqrt{e}$, $V(X_i) = e(e-1)$.
 מה ההסתברות שכעבור שנה כמות השפנים גדלה פי 20?

תשובות סופיות:

(1) א. התפלגות נורמלית סטנדרטית. ב. 1. ג. 0.1587.

$$(2) \quad N\left(\mu = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{100}{1.02}\right), \sigma^2 = \ln(1.02)\right)$$

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) א. 7.98. ב. 0.9963.

(6) 0.1949.