

# אלגברה ליניארית

פרק 6 - וקטורים במרחב כולל מכפלה וקטורית מכפלה מעורבת ושימושיהם

תוכן העניינים

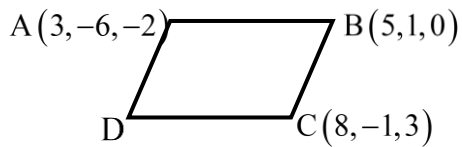
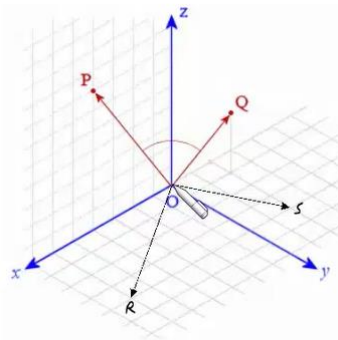
1. וקטורים.....1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת.....6
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב.....8

## וקטורים

**הערת סימון:** אנו נסמן את הווקטור  $u$  כך  $\underline{u}$ . סימונים מקובלים נוספים הם:  $\vec{u}$ ,  $\underline{\underline{u}}$ .  
את גודל הווקטור  $\underline{u}$  נסמן כך  $|\underline{u}|$ . סימון מקובל נוסף הוא  $\|\underline{u}\|$ .  
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

## שאלות

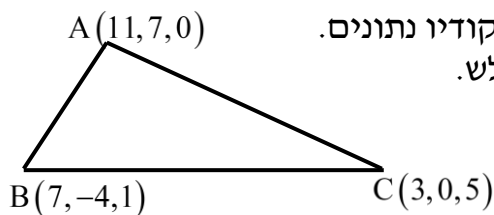
- (1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$  שבאיור. הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצא את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.

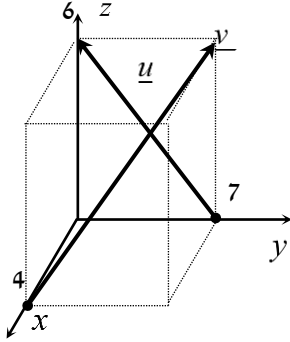


- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):  
 א. מצא את הווקטור  $\overline{EF}$ , אם נתונות הנקודות  $E(2,0,-3)$  ו-  $F(7,-1,-3)$ .

ב. מצא את שיעורי הנקודה  $N$ , אם נתונה הנקודה  $M(0,-4,1)$

והווקטור  $\overline{MN} = (-1,-1,9)$ .



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.  
 מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

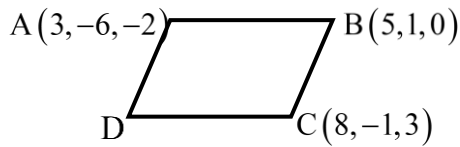
(7) מצא את  $x$ ,  $y$  ו-  $z$ , אם נתון ש-  $\underline{u} = \underline{v}$ , כאשר  $\underline{u} = (4, -1, 2)$ ,  
 $\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$ .

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$ ,  $B(3,7,-4)$ ,  $C(6,9,0)$ ,  $D(7,4,10)$ ,  $E(9,11,4)$

א. הראה כי:  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר כי גם  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,  
 ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.  
 מצא את שיעורי הקדקוד  $D$ .  
 \* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים:  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ,  $\underline{w} = (2, 6, -5)$ .  
 \* בשאלות 13, 14, 16 הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשב:

א.  $2\underline{u}$       ב.  $-0.5\underline{v}$       ג.  $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשב:

א.  $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$       ב.  $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12)  $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13)  $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14)  $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15)  $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16)  $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות:  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ ,  
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17)  $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18)  $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19)  $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$$A(-4, 2, 1), B(0, 2, -1), C(-3, -5, 0), D(-7, -5, 2)$$

הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

- (21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :  
 $A(1, 2, 0)$  ,  $B(-2, 5, 3)$  ,  $C(-1, 8, 4)$  ,  $D(4, 3, -1)$   
 א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.  
 ב. האם הטרפז שווה שוקיים?
- (22)** חשב את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ , כאשר:  
 א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5)$  ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$   
 ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1)$  ,  $\underline{v} = (2, 5, 3)$   
 ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3)$  ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$
- (23)** מצא את שטחו של משולש ABC, שקדקודיו הם:  
 $A(-3, 2, 1)$  ,  $B(0, 3, 2)$  ,  $C(5, -1, 0)$
- (24)** נתונים הווקטורים:  $\underline{u} = (2, -1, 0)$  ,  $\underline{v} = (5, 0, 3)$   
 מצא וקטור  $\underline{w}$ , שמכפלתו ב- $\underline{u}$  היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$  היא 0, אם ידוע שגודלו הוא  $\sqrt{70}$ .
- (25)** ענה על שני הסעיפים הבאים:  
 א. הוכח כי  $|\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}| \Leftrightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$ .  
 הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.  
 ב. הוכח כי  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 \Leftrightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$ .  
 הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.
- (26)** ענה על חמשת הסעיפים הבאים:  
 א. הוכח כי  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$ .  
 ב. הוכח כי  $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$ .  
 ג. הוכח כי  $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$ .  
 ד. הוכח כי  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$ .  
 תן פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.  
 ה. הוכח כי  $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$ .

**תשובות סופיות**

**(1)**  $\vec{P} = (4, 0, 7), \vec{Q} = (-2, 1, 3), \vec{R} = (6, 4, 0), \vec{S} = (-2, 4, 0)$

**(2)**  $D = (6, -8, 1)$

**(3)**  $\underline{u} = (4, 11, 5)$

**(4)**  $M = (7, 1, 2)$

**(5)** א.  $\vec{EF} = (5, -1, 0)$  ב.  $N = (-1, -5, 10)$

**(6)**  $\underline{u} = (0, -7, 6), \underline{v} = (-4, 7, 6)$

**(7)** א.  $x = 5, y = -2, z = 6$

**(8)** א. הוכחה. ב. לא.

**(9)**  $D = (6, -8, 1)$

**(10)** א.  $(-6, 2, 8)$  ב.  $(-2, 1, 3)$  ג.  $(-17, 7, 24)$

**(11)** א.  $(2.5, -1, -3.5)$  ב.  $(9.5, 9.5, -18)$

**(12)**  $(19, 19, -36)$

**(13)**  $\left( \frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right)$

**(14)**  $\sqrt{158}$

**(15)** 14

**(16)**  $\underline{u}^*$

**(17)**  $(5, 7, 1)$

**(18)**  $(-8, -16, 8)$

**(19)**  $(8, 12, 0)$

**(20)** הוכחה.

**(21)** א. הוכחה. ב. כן.

**(22)** א.  $\alpha = 97.277^\circ$  ב.  $\alpha = 90^\circ$  ג.  $\alpha = 180^\circ$

**(23)**  $S_{\triangle ABC} = 10.173$  יח"ש.

**(24)**  $(-3, -6, 5)$

**(25)** הוכחה.

**(26)** הוכחה.

## מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

### שאלות

$$(1) \text{ נתון: } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חשב:  $(u \times v) \times w$ .

$$(2) \text{ חשב את שטח המשולש, שקדקודיו: } A(8, 2, 3), B(4, -1, 2), C(-8, 0, 4)$$

(3) נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |u| \neq 0, \quad u \cdot w = 0, \quad u \times v = 0,$$

$$\text{הוכח כי: } v \cdot w = 0.$$

(4) נתונים שני וקטורים  $u, v$  במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |v| = 4, \quad |u| = 1, \quad u \perp v$$

$$\text{חשב: } |(u + v) \times (u - v)|$$

$$(5) \text{ נתון } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

חשב:

$$\text{א. } u \cdot (v \times w) \quad \text{ב. } v \cdot (w \times u) \quad \text{ג. } (u \times v) \cdot w$$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו  $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$ .

ב. חשב את נפח הפירמידה שקדקודה  $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$ .

(7) חשב את נפח הפירמידה שקדקודה  $A(2, 2, 5), B(1, -1, -4), C(3, 3, 10), D(8, 6, 3)$ .

8 נתון מקבילון הבנוי על וקטורים  $a, b, c$ .  
 הוכח כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים  $a, a - b, a + b - 4c$ ,  
 שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.  
 הוכח כי  $[(u + v) \times (v + w)](u + w) = 2w \cdot (u \times v)$ .

10 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.  
 ידוע כי:  $u \cdot (v \times w) = 4$ .  
 חשב:

א.  $u \cdot (w \times v)$

ב.  $(v \times w) \cdot u$

ג.  $w \cdot (u \times v)$

ד.  $v \cdot (u \times w)$

11 נתונים שלושה וקטורים  $a, b, c$  במרחב.  
 מהי הנוסחה עבור  $a \times b \times c$ ?

### תשובות סופיות

(1)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2)  $S = 22.5$

(3) הוכחה.

(4) 8

(5) א. -3      ב. -3      ג. -3

(6) א. -6      ב. 1

(7)  $9\frac{1}{3}$

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

(10) א. -4      ב. 4      ג. 4      ד. 4

(11) אין לו נוסחה.

## שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

### שאלות

(1) הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:  
 $A = (1, 2, 1)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C = (2, 1, 2)$ ,  $D(2, 2, 2)$

(2) מצא את מרחק הנקודה  $A(3, -2, 1)$   
 מהישר  $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$

(3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

א. הוכח שהישרים מצטלבים.

ב. מצא את המרחק בין הישרים.

### תשובות סופיות

(1) הוכחה.

(2)  $\sqrt{26}$

(3) א. הוכחה. ב. 5.7735