חדוא 2

פרק 1 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

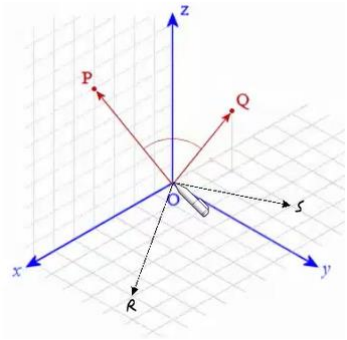
1. וקטורים 1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת 6
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב 8
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי 9
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור 13

וקטורים

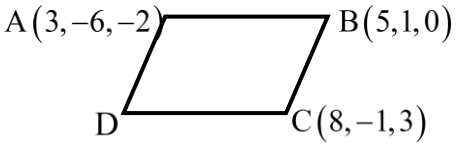
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}, \mathbf{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

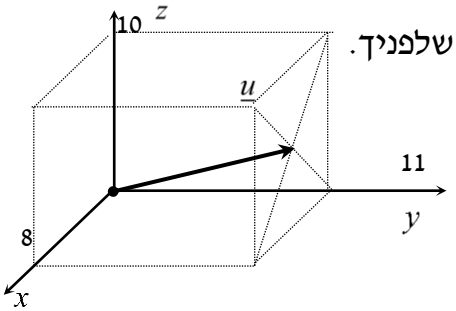
1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



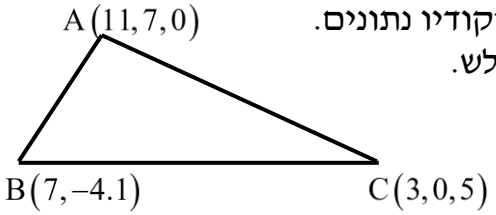
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



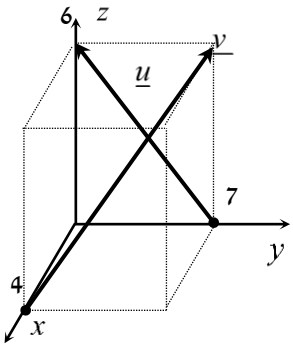
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



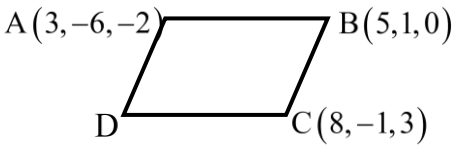
7) מצא את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$,
$\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראה כי $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **10-16** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$ ו- $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, ו-**16** הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשב:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **17-19** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים:

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$\text{A}(-4,2,1)$, $\text{B}(0,2,-1)$, $\text{C}(-3,-5,0)$, $\text{D}(-7,-5,2)$.
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים $\underline{v}=(5,0,3)$, $\underline{u}=(2,-1,0)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב-$\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב-$\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) ענה על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי $|u+v|=|u-v| \Leftrightarrow u \perp v$.
הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכח כי $|u+v|^2=|u|^2+|v|^2 \Leftrightarrow u \perp v$.
הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

26) הוכח:

א. $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$

ב. $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$

ג. $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$

ד. $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$

תן פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5,\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}^*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) הוכחה.

21) א. הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) הוכחה.

26) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

חשב: $(u\times v)\times w$.

2) חשב את שטח המשולש שקדקודיו: $A=(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי: $|u|\neq 0$, $u\cdot w=0$, $u\times v=0$.

הוכח כי: $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי: $|v|=4$, $|u|=1$, $u\perp v$.

חשב: $\left|(u+v)\times(u-v)\right|$.

5) נתון $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix}$.

חשב:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

ב. חשב את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

7) חשב את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5),B(1,-1,-4),C(3,3,10),D(8,6,3)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a,b,c}$.
הוכח כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a,a-b,a+b-4c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכח כי $\left[(u+v)\times(v+w)\right](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי: $u\cdot(v\times w)=4$.
חשב:

א. $u\cdot(w\times v)$ ב. $(v\times w)\cdot u$ ג. $w\cdot(u\times v)$ ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a,b,c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a\times b\times c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) 8

5) א. -3 ב. -3 ג. -3

6) א. 6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצא את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_1:\ \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3}, \qquad L_2:\ x+7=y-5\ ,\ z=3$$

א. הוכח שהישרים מצטלבים.
ב. מצא את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) $\sqrt{26}$
3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,
כאשר $r(t)=\left(\cos \pi t,-\ln t,\sqrt{t-2}\right)$ ו- $t_0=4$.

ב. רשום את המשוואות הפרמטריות $x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\cos^2 t$,
כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשום את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה)
הווקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

2) רשום את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א. $9x^2+4y^2=36$ (במישור xy)

ב. $\begin{cases}-x+y-z+1=0\\4x-2y-2z-1=0\end{cases}$

ג. $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$

ד. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=y+2\end{cases}$

ה. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=x^2\end{cases}$

ו. $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\z=2x\end{cases}$

3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(21t^2,21t^2-1,10e^t\right)$.
בסעיפים א-ג, חשב:

א. $\lim\limits_{t\to 1} r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int\limits_0^1 r(t)dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב-$t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונה: $r(t)=\left(\cos 4t,\sin 4t,t^4\right)$.

א. חשב: $\frac{dr}{dt}$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|$, $\frac{d\,|r'|}{dt}$.

ב. הוכח שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$.

א. גזור את הפונקציה.

ב. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$ ב-$t=0$.

ג. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$, בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצא משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t)=(\sin t,e^{2t},t^2)$, ב-$t=0$.

6) נתונה העקומה $r(t)=\left(t^2,t,5\right)$.

א. מצא נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור $x-6y+4z-3=0$.

ב. מצא משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t)=\left(3\sin t,-2\cos t,t\right)$, ב-$t=0.5\pi$.

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

7) נתון $r(t)=\left(3\sin t,3\cos t,4t\right)$.

חשב את משיק היחידה (**T**), נורמל היחידה (**N**) והבינורמל (**B**) של r.

8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכח שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t, אז $r(t)\cdot r'(t)=0$.
כלומר, $r(t)$ ו-$r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכח שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

מצא את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק, המתאימים ל-$t=2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתון $r(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$.
על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית, הוכח כי $r'(t)=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)$.

11) חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x=t^3+2t,\ y=-3e^{-2t},\ z=2\sin 5t$.
עבור החלקיק, בזמן $t=0$, חשב את:
א. המהירות.
ב. גודל המהירות.
ג. התאוצה.
ד. גודל התאוצה.
ה. הזווית בין וקטורֵי המהירות והתאוצה.

12) נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן: $\vec{r}(t)=\vec{v}_0t-\frac{1}{2}gt^2\vec{k}$,
כאשר $\vec{v}_0=\vec{v}(0)=(v_{01},v_{02},v_{03})$ המהירות ההתחלתית.
מצא את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13) חלקיק נע על העקומה $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.
א. חשב את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t.
ב. שרטט את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t=0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.
ג. הראה שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14) מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t)=(2,-1,-10t)$.
ברגע $t=0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(0,0,100)$.
מצא את משואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

15) תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t)=\big(18\cos 3t,-18\sin 3t,0\big)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(2,0,1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)
ובמהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $0<t\le 4$ ב. $r(t)=\left(\sin t,\ \cos t,\cos^2 t\right)$ ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

2) א. $x=2\cos t\ ,\ y=3\sin t$
$r(t)=\left(2\cos t,3\sin t\right)$
ב. $x=2t-0.5,\ y=3t-1.5,\ z=t$
$r(t)=\left(2t-0.5,3t-1.5,t\right)$
ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^4$
$r(t)=\left(t,t^2,t^4\right)$
ד. $x=t,\ y=\frac{t^2}{4}-1,\ z=\frac{t^2}{4}+1$
$r(t)=\left(t,\frac{t^2}{4}-1,\frac{t^2}{4}+1\right)$
ה. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=9\cos^2 t$
$r(t)=\left(3\cos t,3\sin t,9\cos^2 t\right)$

3) א. $(21,20,10e)$ ב. $\left(42t,42t,10e^t\right)$ ג. $(7,6,10e-10)$ ד. כן ה. כן.

4) א. $\frac{dr}{dt}=\left(-4\sin 4t,4\cos 4t,4t^3\right),\ \left|\frac{dr}{dt}\right|=4\sqrt{1+t^6},\ \frac{d\,|r'|}{dt}=\frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}}$
ב. שאלת הוכחה.

5) א. $r'(t)=\left(4\cos 4t,e^t+te^t,4t^3\right)$ ב. $(x,y,z)=(0,0,0)+s(4,1,0)$
ג. $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,2,4)$ ד. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$

6) א. $(9,3,5)$ ב. $2y+z=0.5\pi$

7) $T(t)=\frac{1}{5}\left(3\cos t,-3\sin t,4\right),\ N(t)=(-\sin t,-\cos t,0),\ B(t)=\frac{1}{5}\left(4\cos t,-4\sin t,-3\right)$

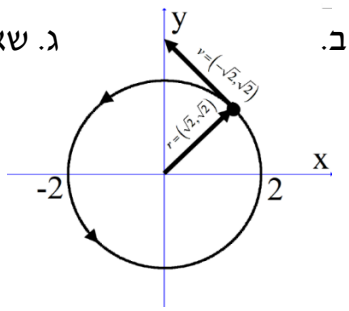
8) שאלת הוכחה.

9) המישור הניצב $x+4y+12z=114$, מישור הנישוק $24x-12y+2z=16$,
מישור היישור $76x+143y-54z=292$.

10) שאלת הוכחה.

11) א. $(2,6,10)$ ב. $\sqrt{140}$ ג. $(0,-12,0)$ ד. 12 ה. 120.46°

12) $v(t)=\left(v_{01},v_{02},v_{03}-gt\right),\ |v(t)|=\sqrt{(v_{01})^2+(v_{02})^2+(v_{03}-gt)^2},\ a(t)=\left(0,0,-g\right),\ |a(t)|=g$

13) א. $v(t)=(-2\sin t,2\cos t)$
$|v(t)|=2$
ב. 

ג. שאלת הוכחה.

14) $r(t)=(2t,-t,-5t^2+100)$

15) $r(t)=(-2\cos 3t+4,2\sin 3t-4t,4t+1)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

1) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z),\ \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכח:

א. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\operatorname{div}(\mathbf{F})+\operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב. $\nabla(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla(\mathbf{F})+\nabla(\mathbf{G})$

2) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.

הוכח כי: $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})=(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{F}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

3) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.

א. הוכח כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$. או בניסוח אחר $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.

ב. הוכח כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$. או בניסוח אחר $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$.

4) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z),\ \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כללים

הוכח כי: $\mathbf{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\mathbf{curl}(\mathbf{F})+\mathbf{curl}(\mathbf{G})$.

5) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי.

הוכח כי $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=-\nabla^2\mathbf{F}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x,y,z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad}\varphi$ מוגדר על ידי $\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

<u>הגדרה (דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)</u>

יהי $\mathbf{F} = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$.

מגדירים את **הדיברגנץ של** $\mathbf{F}$ המסומן $\text{div}\mathbf{F}$, כך:

$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\text{div}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (f,g,h)$$

$$\text{div}\mathbf{F} = f_x + g_y + h_z$$

מגדירים את **ה- curl של** $\mathbf{F}$ המסומן $\text{curl}\mathbf{F}$, על ידי:

$$\mathbf{curlF} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{curlF} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (f,g,h)$$

$$\mathbf{curlF} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{curlF} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{curlF} = (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot}\mathbf{F}$ במקום $\text{curl}\mathbf{F}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©