

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 4 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

1. וקטורים..... 1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת..... 6
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב..... 8
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי..... 9
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור..... 13

וקטורים

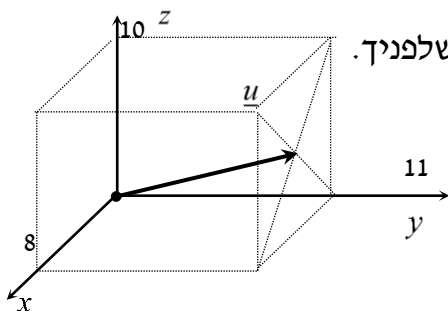
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך \underline{u} . סימונים מקובלים נוספים הם: \vec{u} , \vec{u} . את גודל הווקטור \underline{u} נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$. גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

- (1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור. הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצא את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור \underline{u} על פי השרטוט.



- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצא את הווקטור \overline{EF} אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$

והווקטור $\overline{MN} = (-1,-1,9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור \underline{u} ומהו הווקטור \underline{v} .

(7) מצא את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,

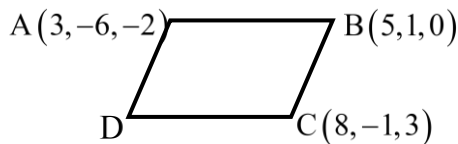
$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$

א. הראה כי $\overline{AB} = \overline{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overline{AD} = \overline{BC}$? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

שיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצא את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ו- $\underline{w} = (2, 6, -5)$.
 * בשאלות 13, 14, ו-16 הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשב:

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$,
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17) $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18) $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19) $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$$A(-4, 2, 1), B(0, 2, -1), C(-3, -5, 0), D(-7, -5, 2)$$

הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

(21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :
 $A(1, 2, 0)$, $B(-2, 5, 3)$, $C(-1, 8, 4)$, $D(4, 3, -1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(22) חשב את הזווית שבין הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

(23) מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :
 $A(-3, 2, 1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(5, -1, 0)$

(24) נתונים הווקטורים $\underline{u} = (2, -1, 0)$, $\underline{v} = (5, 0, 3)$

מצא וקטור \underline{w} שמכפלתו ב- \underline{u} היא 0 ומכפלתו ב- \underline{v} היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

(25) ענה על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי $|\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}| \Leftrightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$.

הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכח כי $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 \Leftrightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$.

הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

(26) הוכח :

א. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב. $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג. $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תן פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (25)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (26)$$

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

$$(1) \text{ נתון: } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חשב: $(u \times v) \times w$.

$$(2) \text{ חשב את שטח המשולש שקדקודיו: } A = (8, 2, 3), B(4, -1, 2), C(-8, 0, 4)$$

(3) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |u| \neq 0, \quad u \cdot w = 0, \quad u \times v = 0,$$

$$\text{הוכח כי: } v \cdot w = 0.$$

(4) נתונים שני וקטורים u, v במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |v| = 4, \quad |u| = 1, \quad u \perp v$$

$$\text{חשב: } |(u + v) \times (u - v)|$$

$$(5) \text{ נתון } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

חשב:

$$\text{א. } u \cdot (v \times w) \quad \text{ב. } v \cdot (w \times u) \quad \text{ג. } (u \times v) \cdot w$$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$.

ב. חשב את נפח הפירמידה שקדקודה $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$.

(7) חשב את נפח הפירמידה שקדקודה $A(2, 2, 5), B(1, -1, -4), C(3, 3, 10), D(8, 6, 3)$.

8 נתון מקבילון הבנוי על וקטורים a, b, c .
 הוכח כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $a, a-b, a+b-4c$,
 שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9 נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
 הוכח כי $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$.

10 נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.

$$u \cdot (v \times w) = 4$$

חשב:

א. $u \cdot (w \times v)$ ב. $(v \times w) \cdot u$ ג. $w \cdot (u \times v)$ ד. $v \cdot (u \times w)$

11 נתונים שלושה וקטורים a, b, c במרחב.

מהי הנוסחה עבור $a \times b \times c$?

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$S = 22.5 \quad (2)$$

שאלת הוכחה. (3)

$$8 \quad (4)$$

$$\text{א. } -3 \quad \text{ב. } -3 \quad \text{ג. } -3 \quad (5)$$

$$\text{א. } 6 \quad \text{ב. } 1 \quad (6)$$

$$9 \frac{1}{3} \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

שאלת הוכחה. (9)

$$\text{א. } -4 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 4 \quad \text{ד. } 4 \quad (10)$$

אין לו נוסחה. (11)

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

- (1) הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
 $A = (1, 2, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C = (2, 1, 2)$, $D(2, 2, 2)$

- (2) מצא את מרחק הנקודה $A(3, -2, 1)$ מהישר $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$.

- (3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

- א. הוכח שהישרים מצטלבים.
 ב. מצא את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.

(2) $\sqrt{26}$

- (3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$, כאשר $r(t) = (\cos \pi t, -\ln t, \sqrt{t-2})$ ו- $t_0 = 4$.
- ב. רשום את המשוואות הפרמטריות $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \cos^2 t$ כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).
- ג. רשום את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה) הווקטורית $r(t) = (t, t^2, t^3)$.

(2) רשום את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א. $9x^2 + 4y^2 = 36$ (במישור xy) ב. $\begin{cases} -x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$ ד. $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = y + 2 \end{cases}$

ה. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x^2 \end{cases}$ ו. $\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ z = 2x \end{cases}$

(3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (21t^2, 21t^2 - 1, 10e^t)$.

בסעיפים א-ג, חשב:

א. $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int_0^1 r(t) dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t = 1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

(4) נתונה: $r(t) = (\cos 4t, \sin 4t, t^4)$

א. חשב: $\frac{dr}{dt}$, $\left| \frac{dr}{dt} \right|$, $\frac{d|r'|}{dt}$

ב. הוכח שהפונקציה מסעיף אי' חלקה.

(5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$

א. גזור את הפונקציה.

ב. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$ ב- $t=0$.

ג. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$ בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצא משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin t, e^{2t}, t^2)$ ב- $t=0$.

(6) נתונה העקומה $r(t) = (t^2, t, 5)$

א. מצא נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור

$$x - 6y + 4z - 3 = 0$$

ב. מצא משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t) = (3 \sin t, -2 \cos t, t)$

$$t = 0.5\pi$$

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

(7) נתון $r(t) = (3 \sin t, 3 \cos t, 4t)$

חשב את משיק היחידה (T), נורמל היחידה (N) והבינורמל (B) של r.

(8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכח שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t , אז $r(t) \cdot r'(t) = 0$.

כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכח שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

(9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (t, t^2, t^3)$

מצא את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק,

המתאימים ל- $t=2$.

10 נתון $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית, הוכח כי $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

11 חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x = t^3 + 2t$, $y = -3e^{-2t}$, $z = 2\sin 5t$

עבור החלקיק, בזמן $t = 0$, חשב את:

- המהירות.
- גודל המהירות.
- התאוצה.
- גודל התאוצה.
- הזווית בין וקטורי המהירות והתאוצה.

12 נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן: $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k}$

כאשר $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$ המהירות ההתחלתית. מצא את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13 חלקיק נע על העקומה $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

- חשב את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t .
- שרטט את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t = 0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.
- הראה שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14 מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t) = (2, -1, -10t)$.

ברגע $t = 0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (0, 0, 100)$.

מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

15 תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t) = (18\cos 3t, -18\sin 3t, 0)$.

ברגע $t = 0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (2, 0, 1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)

ובמהירות $v(0) = (0, 2, 4)$.

מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

תשובות סופיות

$$r(4) = (\cos 4\pi, -\ln 4, \sqrt{2}) \quad \text{א.א.} \quad 0 < t \leq 4 \quad \text{א.1} \quad (1)$$

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \quad \text{ג.} \quad r(t) = (\sin t, \cos t, \cos^2 t) \quad \text{ב.}$$

$$x = 2t - 0.5, y = 3t - 1.5, z = t \quad \text{ב.} \quad x = 2 \cos t, y = 3 \sin t \quad \text{א.2} \quad (2)$$

$$r(t) = (2t - 0.5, 3t - 1.5, t) \quad \text{ב.} \quad r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t) \quad \text{א.}$$

$$x = t, y = \frac{t^2}{4} - 1, z = \frac{t^2}{4} + 1 \quad \text{ד.} \quad x = t, y = t^2, z = t^4 \quad \text{ג.}$$

$$r(t) = \left(t, \frac{t^2}{4} - 1, \frac{t^2}{4} + 1 \right) \quad \text{ד.} \quad r(t) = (t, t^2, t^4) \quad \text{ג.}$$

$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9 \cos^2 t \quad \text{ה.}$$

$$r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos^2 t) \quad \text{ה.}$$

$$(21, 20, 10e) \quad \text{א.3} \quad (42t, 42t, 10e^t) \quad \text{ב.} \quad (7, 6, 10e - 10) \quad \text{ג.} \quad \text{ד. כן. ה. כן.} \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = (-4 \sin 4t, 4 \cos 4t, 4t^3), \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = 4\sqrt{1+t^6}, \quad \frac{d|r'|}{dt} = \frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}} \quad \text{א.4} \quad (4)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(4, 1, 0) \quad \text{ב.} \quad r'(t) = (4 \cos 4t, e^t + te^t, 4t^3) \quad \text{א.5} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \quad \text{ד.} \quad (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 4) \quad \text{ג.}$$

$$2y + z = 0.5\pi \quad \text{ב.} \quad (9, 3, 5) \quad \text{א.6} \quad (6)$$

$$T(t) = \frac{1}{5}(3 \cos t, -3 \sin t, 4), \quad N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0), \quad B(t) = \frac{1}{5}(4 \cos t, -4 \sin t, -3) \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

$$, 24x - 12y + 2z = 16 \quad \text{מישור הנישוק} \quad , x + 4y + 12z = 114 \quad \text{מישור הניצב} \quad (9)$$

$$76x + 143y - 54z = 292 \quad \text{מישור היישור}$$

שאלת הוכחה. (10)

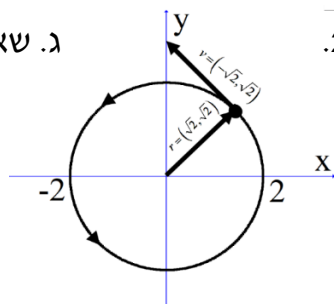
$$120.46^\circ \quad \text{ה.} \quad 12 \quad \text{ד.} \quad (0, -12, 0) \quad \text{ג.} \quad \sqrt{140} \quad \text{ב.} \quad (2, 6, 10) \quad \text{א.11} \quad (11)$$

$$v(t) = (v_{01}, v_{02}, v_{03} - gt), \quad |v(t)| = \sqrt{(v_{01})^2 + (v_{02})^2 + (v_{03} - gt)^2}, \quad a(t) = (0, 0, -g), \quad |a(t)| = g \quad (12)$$

$$v(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \quad \text{א.13} \quad (13)$$

$$|v(t)| = 2$$

ג. שאלת הוכחה.



$$r(t) = (2t, -t, -5t^2 + 100) \quad (14)$$

$$r(t) = (-2 \cos 3t + 4, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1) \quad (15)$$

גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

(1) יהיו $\mathbf{F}(x, y, z)$, $\mathbf{G}(x, y, z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכח:

א. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב. $\nabla(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla(\mathbf{F}) + \nabla(\mathbf{G})$

(2) יהי $\mathbf{F}(x, y, z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה.

הוכח כי: $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

(3) יהי $\mathbf{F}(x, y, z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה.

א. הוכח כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$. או בניסוח אחר $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

ב. הוכח כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$. או בניסוח אחר $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$.

(4) יהיו $\mathbf{F}(x, y, z)$, $\mathbf{G}(x, y, z)$ שדות וקטורים כללים

הוכח כי: $\operatorname{curl}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{curl}(\mathbf{F}) + \operatorname{curl}(\mathbf{G})$.

(5) יהי $\mathbf{F}(x, y, z)$ שדה וקטורי.

הוכח כי $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad } \varphi$ מוגדר על ידי $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$.

הגדרה (דיברגנץ וקראל של שדה וקטורי)

יהי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ מגדירים את הדיברגנץ של \mathbf{F} המסומן $\text{div } \mathbf{F}$, כך:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f, g, h) \\ \text{div } \mathbf{F} &= f_x + g_y + h_z \end{aligned}$$

מגדירים את ה- curl של \mathbf{F} המסומן $\text{curl } \mathbf{F}$, על ידי:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f, g, h) \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot } \mathbf{F}$ במקום $\text{curl } \mathbf{F}$.