

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 1 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

1. וקטורים..... 1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת..... 6
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב..... 8
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי..... 9
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור..... 13

## וקטורים

**הערת סימון:** אנו נסמן את הווקטור  $u$  כך  $\underline{u}$ . סימונים מקובלים נוספים הם:  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}$ .  
את גודל הווקטור  $\underline{u}$  נסמן כך  $|\underline{u}|$ . סימון מקובל נוסף הוא  $\|\underline{u}\|$ .  
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

### שאלות

- (1) רשום את נוסחת כל אחד מהווקטורים  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$  שבאיור. הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצא את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.



- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצא את הווקטור  $\overline{EF}$  אם נתונות הנקודות  $E(2,0,-3)$  ו-  $F(7,-1,-3)$ .

ב. מצא את שיעורי הנקודה  $N$ , אם נתונה הנקודה  $M(0,-4,1)$

והווקטור  $\overline{MN} = (-1,-1,9)$ .



(6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

(7) מצא את  $x$ ,  $y$  ו-  $z$ , אם נתון ש-  $\underline{u} = \underline{v}$  כאשר  $\underline{u} = (4, -1, 2)$ ,

$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$ .

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$ ,  $B(3,7,-4)$ ,  $C(6,9,0)$ ,  $D(7,4,10)$ ,  $E(9,11,4)$

א. הראה כי  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר גם כי  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

שיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצא את שיעורי הקדקוד  $D$ .

\* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$  ו-  $\underline{w} = (2, 6, -5)$ .  
 \* בשאלות 13, 14, ו-16 הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשב:

א.  $2\underline{u}$       ב.  $-0.5\underline{v}$       ג.  $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשב:

א.  $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$       ב.  $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12)  $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13)  $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14)  $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15)  $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16)  $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ ,  
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17)  $\overline{AC} + \overline{AB}$

(18)  $2\overline{AC} - 4\overline{AB}$

(19)  $2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$$A(-4, 2, 1), B(0, 2, -1), C(-3, -5, 0), D(-7, -5, 2)$$

הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

**(21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :  
 $A(1, 2, 0)$  ,  $B(-2, 5, 3)$  ,  $C(-1, 8, 4)$  ,  $D(4, 3, -1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**(22)** חשב את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  :

א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5)$  ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1)$  ,  $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3)$  ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$

**(23)** מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :  
 $A(-3, 2, 1)$  ,  $B(0, 3, 2)$  ,  $C(5, -1, 0)$

**(24)** נתונים הווקטורים  $\underline{u} = (2, -1, 0)$  ,  $\underline{v} = (5, 0, 3)$

מצא וקטור  $\underline{w}$  שמכפלתו ב- $\underline{u}$  היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$  היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא  $\sqrt{70}$ .

**(25)** ענה על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכח כי  $|\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}| \Leftrightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$ .

הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכח כי  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 \Leftrightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$ .

הסבר מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

**(26)** הוכח :

א.  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב.  $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג.  $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד.  $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תן פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה.  $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

## תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left( \frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (25)$$

$$\text{הוכחה.} \quad (26)$$

## מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

### שאלות

$$(1) \text{ נתון: } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חשב:  $(u \times v) \times w$ .

$$(2) \text{ חשב את שטח המשולש שקדקודיו: } A = (8, 2, 3), B(4, -1, 2), C(-8, 0, 4)$$

(3) נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |u| \neq 0, \quad u \cdot w = 0, \quad u \times v = 0,$$

$$\text{הוכח כי: } v \cdot w = 0.$$

(4) נתונים שני וקטורים  $u, v$  במרחב.

$$\text{ידוע כי: } |v| = 4, \quad |u| = 1, \quad u \perp v$$

$$\text{חשב: } |(u + v) \times (u - v)|$$

$$(5) \text{ נתון } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

חשב:

$$\text{א. } u \cdot (v \times w) \quad \text{ב. } v \cdot (w \times u) \quad \text{ג. } (u \times v) \cdot w$$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את נפח המקבילון שקדקודיו  $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$

ב. חשב את נפח הפירמידה שקדקודה  $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$

(7) חשב את נפח הפירמידה שקדקודה  $A(2, 2, 5), B(1, -1, -4), C(3, 3, 10), D(8, 6, 3)$

8 נתון מקבילון הבנוי על וקטורים  $a, b, c$ .  
 הוכח כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים  $a, a-b, a+b-4c$ ,  
 שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.  
 הוכח כי  $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$ .

10 נתונים שלושה וקטורים  $u, v, w$  במרחב.

$$u \cdot (v \times w) = 4$$

חשב:

א.  $u \cdot (w \times v)$     ב.  $(v \times w) \cdot u$     ג.  $w \cdot (u \times v)$     ד.  $v \cdot (u \times w)$

11 נתונים שלושה וקטורים  $a, b, c$  במרחב.

מהי הנוסחה עבור  $a \times b \times c$ ?

### תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$S = 22.5 \quad (2)$$

שאלת הוכחה. (3)

$$8 \quad (4)$$

$$\text{א. } -3 \quad \text{ב. } -3 \quad \text{ג. } -3 \quad (5)$$

$$\text{א. } 6 \quad \text{ב. } 1 \quad (6)$$

$$9 \frac{1}{3} \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

שאלת הוכחה. (9)

$$\text{א. } -4 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 4 \quad \text{ד. } 4 \quad (10)$$

אין לו נוסחה. (11)

## שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

### שאלות

(1) הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:  
 $A = (1, 2, 1)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C = (2, 1, 2)$ ,  $D(2, 2, 2)$

(2) מצא את מרחק הנקודה  $A(3, -2, 1)$  מהישר  $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$ .

(3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

- א. הוכח שהישרים מצטלבים.  
 ב. מצא את המרחק בין הישרים.

### תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2)  $\sqrt{26}$

(3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

## פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

### שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מצא את תחום ההגדרה של  $r(t)$  ואת הווקטור  $r(t_0)$ , כאשר  $r(t) = (\cos \pi t, -\ln t, \sqrt{t-2})$  ו- $t_0 = 4$ .
- ב. רשום את המשוואות הפרמטריות  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = \cos^2 t$  כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).
- ג. רשום את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה) הווקטורית  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ .

(2) רשום את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א.  $9x^2 + 4y^2 = 36$  (במישור  $xy$ )      ב.  $\begin{cases} -x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

ג.  $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$       ד.  $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = y + 2 \end{cases}$

ה.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x^2 \end{cases}$       ו.  $\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ z = 2x \end{cases}$

(3) נתונה פונקציה וקטורית  $r(t) = (21t^2, 21t^2 - 1, 10e^t)$ .

בסעיפים א-ג, חשב:

א.  $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$

ב.  $r'(t)$

ג.  $\int_0^1 r(t) dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t = 1$ ?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

(4) נתונה:  $r(t) = (\cos 4t, \sin 4t, t^4)$ .

א. חשב:  $\frac{dr}{dt}$ ,  $\left| \frac{dr}{dt} \right|$ ,  $\frac{d|r'|}{dt}$ .

ב. הוכח שהפונקציה מסעיף אי' חלקה.

(5) נתונה הפונקציה הווקטורית  $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$ .

א. גזור את הפונקציה.

ב. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה  $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$  ב- $t = 0$ .

ג. מצא את משוואת הישר, המשיק לעקומה  $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$  בנקודה  $A(1,1,1)$ .

ד. מצא משיק יחידה לפונקציה הווקטורית  $r(t) = (\sin t, e^{2t}, t^2)$  ב- $t = 0$ .

(6) נתונה העקומה  $r(t) = (t^2, t, 5)$ .

א. מצא נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור

$$x - 6y + 4z - 3 = 0$$

ב. מצא משוואה של המישור, הניצב לעקומה  $r(t) = (3 \sin t, -2 \cos t, t)$ ,

$$t = 0.5\pi$$

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

(7) נתון  $r(t) = (3 \sin t, 3 \cos t, 4t)$ .

חשב את משיק היחידה (T), נורמל היחידה (N) והבינורמל (B) של  $r$ .

(8) תהי  $r(t)$  פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכח שאם  $|r(t)|$  קבוע לכל  $t$ , אז  $r(t) \cdot r'(t) = 0$ .

כלומר,  $r(t)$  ו- $r'(t)$  ניצבים זה לזה.

ב. הוכח שנורמל היחידה  $N(t)$ , ניצב למשיק היחידה  $T(t)$ .

(9) נתונה פונקציה וקטורית  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ .

מצא את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק,

המתאימים ל- $t = 2$ .

**10** נתון  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית, הוכח כי  $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ .

**11** חלקיק נע לאורך עקום מרחבי  $x = t^3 + 2t$ ,  $y = -3e^{-2t}$ ,  $z = 2\sin 5t$

עבור החלקיק, בזמן  $t = 0$ , חשב את:

- המהירות.
- גודל המהירות.
- התאוצה.
- גודל התאוצה.
- הזווית בין וקטורי המהירות והתאוצה.

**12** נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן:  $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k}$

כאשר  $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$  המהירות ההתחלתית. מצא את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

**13** חלקיק נע על העקומה  $x = 2\cos t$ ,  $y = 2\sin t$ .

- חשב את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע  $t$ .
- שרטט את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע  $t = 0.25\pi$ , כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.
- הראה שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

**14** מהירות  $v(t)$  של חלקיק נתונה על ידי  $v(t) = (2, -1, -10t)$ .

ברגע  $t = 0$ , החלקיק נמצא בנקודה  $r(0) = (0, 0, 100)$ .

מצא את משוואת התנועה של החלקיק  $r = r(t)$ .

**15** תאוצה  $a(t)$  של חלקיק, נתונה על ידי  $a(t) = (18\cos 3t, -18\sin 3t, 0)$ .

ברגע  $t = 0$  החלקיק נמצא בנקודה  $r(0) = (2, 0, 1)$  (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)

ובמהירות  $v(0) = (0, 2, 4)$ .

מצא את משוואת התנועה של החלקיק  $r = r(t)$ .

## תשובות סופיות

$$r(4) = (\cos 4\pi, -\ln 4, \sqrt{2}) \quad \text{א.א.} \quad 0 < t \leq 4 \quad \text{א.1} \quad (1)$$

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \quad \text{ג.}$$

$$r(t) = (\sin t, \cos t, \cos^2 t) \quad \text{ב.}$$

$$x = 2t - 0.5, y = 3t - 1.5, z = t \quad \text{ב.}$$

$$r(t) = (2t - 0.5, 3t - 1.5, t)$$

$$x = 2 \cos t, y = 3 \sin t \quad \text{א.2}$$

$$r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$$

$$x = t, y = \frac{t^2}{4} - 1, z = \frac{t^2}{4} + 1 \quad \text{ד.}$$

$$r(t) = \left( t, \frac{t^2}{4} - 1, \frac{t^2}{4} + 1 \right)$$

$$x = t, y = t^2, z = t^4 \quad \text{ג.}$$

$$r(t) = (t, t^2, t^4)$$

$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9 \cos^2 t \quad \text{ה.}$$

$$r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos^2 t)$$

$$(21, 20, 10e) \quad \text{א.3} \quad (42t, 42t, 10e^t) \quad \text{ב.} \quad (7, 6, 10e - 10) \quad \text{ג.} \quad \text{ד. כן. ה. כן.}$$

$$\frac{dr}{dt} = (-4 \sin 4t, 4 \cos 4t, 4t^3), \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = 4\sqrt{1+t^6}, \quad \frac{d|r|}{dt} = \frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}} \quad \text{א.4}$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(4, 1, 0) \quad \text{ב.} \quad r'(t) = (4 \cos 4t, e^t + te^t, 4t^3) \quad \text{א.5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \quad \text{ד.} \quad (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 4) \quad \text{ג.}$$

$$2y + z = 0.5\pi \quad \text{ב.} \quad (9, 3, 5) \quad \text{א.6}$$

$$T(t) = \frac{1}{5}(3 \cos t, -3 \sin t, 4), \quad N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0), \quad B(t) = \frac{1}{5}(4 \cos t, -4 \sin t, -3) \quad \text{7}$$

שאלת הוכחה. 8

$$, 24x - 12y + 2z = 16 \quad \text{מישור הנישוק} \quad , x + 4y + 12z = 114 \quad \text{מישור הניצב} \quad \text{9}$$

$$. 76x + 143y - 54z = 292 \quad \text{מישור היישור}$$

שאלת הוכחה. 10

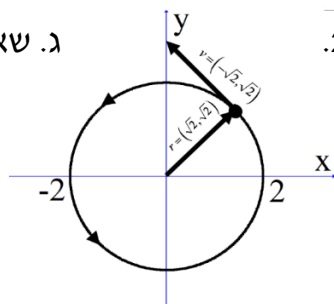
$$120.46^\circ \quad \text{ה.} \quad 12 \quad \text{ד.} \quad (0, -12, 0) \quad \text{ג.} \quad \sqrt{140} \quad \text{ב.} \quad (2, 6, 10) \quad \text{א.11}$$

$$v(t) = (v_{01}, v_{02}, v_{03} - gt), \quad |v(t)| = \sqrt{(v_{01})^2 + (v_{02})^2 + (v_{03} - gt)^2}, \quad a(t) = (0, 0, -g), \quad |a(t)| = g \quad \text{12}$$

$$v(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \quad \text{א.13}$$

$$|v(t)| = 2$$

ג. שאלת הוכחה.



$$r(t) = (2t, -t, -5t^2 + 100) \quad \text{14}$$

$$r(t) = (-2 \cos 3t + 4, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1) \quad \text{15}$$

## גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

### שאלות

(1) יהיו  $\mathbf{F}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{G}(x, y, z)$  שדות וקטורים כלליים. הוכח:

א.  $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב.  $\nabla(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla(\mathbf{F}) + \nabla(\mathbf{G})$

(2) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי, ותהי  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  פונקציה.

הוכח כי:  $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$ .

(3) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי ותהי  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  פונקציה.

א. הוכח כי  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$ . או בניסוח אחר  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ .

ב. הוכח כי  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$ . או בניסוח אחר  $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$ .

(4) יהיו  $\mathbf{F}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{G}(x, y, z)$  שדות וקטורים כללים

הוכח כי:  $\operatorname{curl}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{curl}(\mathbf{F}) + \operatorname{curl}(\mathbf{G})$ .

(5) יהי  $\mathbf{F}(x, y, z)$  שדה וקטורי.

הוכח כי  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ .

\* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ .

הגרדיאנט של  $\varphi$  המסומן  $\text{grad } \varphi$  מוגדר על ידי  $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ .

## הגדרה (דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)

יהי  $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$  מגדירים את הדיברגנץ של  $\mathbf{F}$  המסומן  $\text{div } \mathbf{F}$ , כך:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f, g, h) \\ \text{div } \mathbf{F} &= f_x + g_y + h_z \end{aligned}$$

מגדירים את ה- $\text{curl}$  של  $\mathbf{F}$  המסומן  $\text{curl } \mathbf{F}$ , על ידי:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f, g, h) \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}$$

הערה: יש הרושמים  $\text{rot } \mathbf{F}$  במקום  $\text{curl } \mathbf{F}$ .