גוף קשיח

פרק 2 - וקטורים

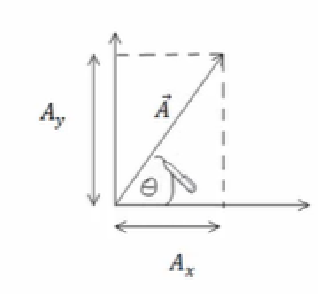
תוכן העניינים

1. הגדרות ופעולות בסיסיות 1
2. מכפלה סקלרית 5
3. מכפלה וקטורית בדו מימד 9
4. וקטור בשלושה מימדים 11
5. מכפלה וקטורית בשלושה מימדים 13

הגדרות ופעולות בסיסיות:

רקע:

פירוק וקטור לרכיבים:



היטל על ציר ה- x או רכיב ה- x של A: $A_x = |\vec{A}|\cos\theta$.

היטל על ציר ה- y או רכיב ה- y של A: $A_y = |\vec{A}|\sin\theta$.

המעבר ההפוך: $\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$, $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$.

הצגת וקטור באמצעות גודל וכיוון נקראת **הצגה פולרית**.
הצגת וקטור באמצעות רכיבי ה- x וה- y נקראת **הצגה קרטזית**.

שאלות:

1) **חיבור וחיסור בקרטזי**

נתונים 3 וקטורים: $\vec{C}(3,5)$, $\vec{B}(4,2)$, $\vec{A}(1,3)$.

א. חשב מהו $A+B+C$?

ב. חשב מהו $A-B-C$?

ג. חשב מהו $2A+3B-4C$?

2) **מקרטזי לפולרי**

נתון הוקטור: $\vec{A}(4,6)$.

א. הצג את הוקטור בצורתו הפולרית (גודל וכיוון).

ב. מהו וקטור היחידה?

3) **מפולרי לקרטזי עם יחידה**

נתון הוקטור $\vec{A}$ בהצגה פולרית.

גודלו $\sqrt{52}$ וכיוונו 56.3 מעלות.

א. הצג את הוקטור בצורת קרטזית.

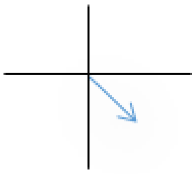
ב. מהו וקטור היחידה?

4) מקרטזי לפולרי ברביע שני

נתון הוקטור : $\vec{A}(3,-4)$.

א. הצג את הוקטור בצורתו הפולרית (גודל וכיוון).

ב. מהו וקטור היחידה?



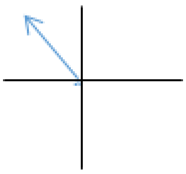
5) מפולרי לקרטזי

נתון הוקטור $\vec{A}$ בצורתו הפולרית.

גודלו 5 וכיוונו 120.

א. הצג את הוקטור בצורתו הקרטזית.

ב. מצא את וקטור היחידה.



6) מקרטזי לפולרי רביע שלישי

נתון הוקטור : $\vec{A}(-2,-4)$.

הצג את הוקטור בצורתו הפולרית.

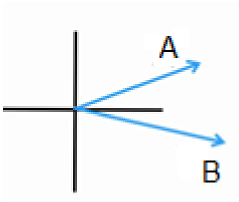
7) חיבור בפולרי

נתונים שני וקטורים :

הוקטור A שגודלו 10 וכיוונו $30°$,

הוקטור B שגודלו לא ידוע וכיוונו $350°$.

מהו גודלו של הוקטור B אם נתון שסכום הוקטורים ייתן וקטור ללא רכיב לציר ה- y ?



8) חיבור וקטורים בפולרי

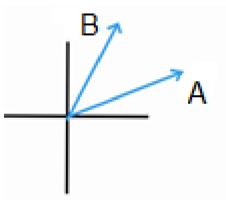
נתונים שני וקטורים בהצגה פולרית :

$\vec{A}$ בגודל 10 ובכיוון 30,

$\vec{B}$ בגודל 8 ובכיוון 60.

נתון : $A+B=C$.

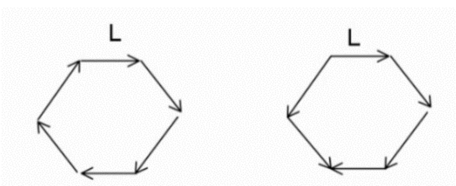
מצא את וקטור C.



9) משושה של וקטורים

מצא את הוקטור השקול לשני המצבים הבאים :

הנח כי הוקטורים יוצרים משושה שווה צלעות וגודל כל צלע הוא L.



10) וקטור בין שתי נקודות

הוקטור $\vec{A}$ הוא וקטור מהנקודה (x_1, y_1, z_1) אל הנקודה (x_2, y_2, z_2).
רשום ביטוי לרכיבים של הוקטור ומצא את גודלו.

11) חיבור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$.
גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_A = 130^\circ$.
גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_B = 60^\circ$.
שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את $\vec{A}+\vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

12) חיסור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$.
גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא $\theta_A = 130^\circ$.
גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא $\theta_B = 60^\circ$.
שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את $\vec{A}-\vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

13) מציאת אורך של שקול

אורכם של שני וקטורים הוא 5 ו-10 ס"מ.
הזווית ביניהם היא 30 מעלות.
מהו אורכו של הוקטור השקול שלהם (סכום הוקטורים)?

14) מציאת זווית בין שני וקטורים

נתונים שני וקטורים שאורכם 10 ו-13 מטר.
אורך השקול שלהם הוא 20 מטר.
מצא את הזווית בין הוקטורים.

תשובות סופיות:

1) א. $(8,10)$ ב. $(-6,-4)$ ג. $(2,-8)$

2) א. $|A|=\sqrt{52}$, $\alpha=56.3$ ב. $\hat{A}=\left(\frac{4}{\sqrt{52}},\frac{6}{\sqrt{52}}\right)$

3) א. $\vec{A}(4,6)$ ב. $\hat{A}=1$

4) א. $|A|=5$, $\alpha=306.88$ ב. $\hat{A}=\left(\frac{3}{5},\frac{-4}{5}\right)$

5) א. $\vec{A}(-2.5,4.33)$ ב. $\hat{A}=\left(\frac{-2.5}{5},\frac{4.33}{5}\right)$

6) $|A|=\sqrt{20}$, $\alpha=243.4$

7) $B=28.79$

8) $\vec{C}(12.66,11.92)$

9) $L\cdot 4\cos(30)$

10) $\vec{A}=(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\ ,\ z_2-z_1)$, $|\vec{A}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

11) $C=10.1$, $\theta_c=108.1°$

12) $C=7.62$, $\theta_c=159.5°$

13) $|\vec{a}|=14.6c.m$

14) $\theta=60°$

מכפלה סקלרית:

רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_x\cdot B_x+A_y\cdot B_y$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\cos\alpha$

α - זווית בין הוקטורים.

<u>הערות</u>:
תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).

נוסחה למציאת זווית בין שני וקטורים: $\cos\alpha=\frac{A_xB_x+A_yB_y}{\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|}=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|}$.

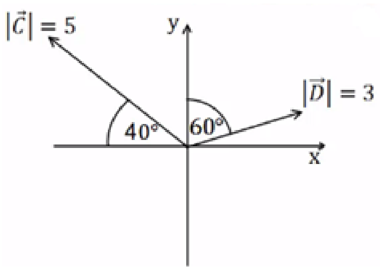
שאלות:

1) דוגמה 1

מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית בין הוקטורים הנתונים בכל המקרים הבאים:

א. $\vec{A}=(-1,2)\ ,\ \vec{B}(2,2)$

ב.



2) דוגמה 2

בדוק עבור זוגות הוקטורים הבאים האם הם מאונכים:

א. $\vec{A}=(1,4)\ ,\ \vec{B}=(-2,5)$

ב. $\vec{A}=(1,4)\ ,\ \vec{B}=(8,-2)$

ג. $\vec{A}=(-1,-2)\ ,\ \vec{B}=(-2,1)$

ד. שרטט כל זוג וקטורים מאונכים על מערכת צירים, חשב את זוויות הוקטורים עם הצירים והראה שהזווית בין הוקטורים היא אכן 90°.

3) דוגמה 3

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{B}=(2,-4)$, $\vec{A}=(-3,1)$.

א. מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. מצא את המכפלה הסקלרית שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בקוסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

4) דוגמה 4

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{B}=(2,-4)$, $\vec{A}=(-3,1)$.

א. הראה כי החישוב של $\vec{A}\cdot\vec{B}$ זהה לחישוב $\vec{B}\cdot\vec{A}$.

ב. הוכח בצורה כללית כי המכפלה הסקלרית היא פעולה קומוטטיבית.
(הדרכה: רשום את הוקטורים בצורה כללית עם נעלמים).

5) דוגמה 5

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{C}=(1,-3)$, $\vec{B}(-3,2)$, $\vec{A}=(2,1)$.

חשב את:

א. $\vec{A}\cdot\vec{C}$

ב. $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$

ג. $\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$

ד. $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$

ה. $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$

ו. $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\vec{B}$

ז. $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$

6) דוגמה 6

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{C}=(1,5)$, $\vec{B}(1,-3)$, $\vec{A}=(-2,2)$.

חשב את:

א. $\dfrac{\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|^2}$

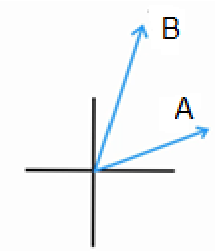
ב. $\dfrac{\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|^2}$

7) דוגמה 7

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{C}=(1,5)$, $\vec{B}(1,-3)$, $\vec{A}=(-2,2)$.

מצא את הזווית בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$ לבין $\vec{B}$ ל- $\vec{C}$.

8) מכפלה סקלרית בשתי השיטות



נתונים שני וקטורים :

הוקטור $\vec{A}$ שגודלו 7 וכיוונו 30.

והוקטור $\vec{B}$ שגודלו 10 וכיוונו 70.

מצא את תוצאת המכפלה הסקלארית שלהם בעזרת שתי שיטות שונות.

9) הוכחת משפט פיתגורס המורחב

הוכח את משפט פיתגורס המורחב (במשולש שאינו ישר זווית) :

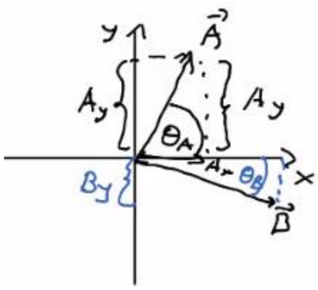
$C^2=A^2+B^2+2AB\cos\alpha$.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{A}\cdot\vec{B}=2$ ב. $\vec{C}\cdot\vec{D}=-5.13$

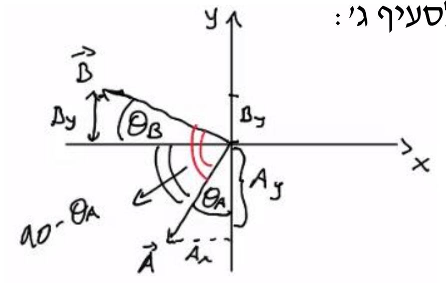
2) א. $\vec{A}$ לא מאונך ל- $\vec{B}$.   ב. הוקטורים מאונכים.   ג. הוקטורים מאונכים.

ד. לסעיף ב':



הזויות: $\theta_B=14.04^\circ$, $\theta_A=75.96^\circ$.

לסעיף ג':



הזוויות: $\theta_B=26.57^\circ$, $\theta_A=26.57^\circ$.

3) א. $\vec{A}\cdot\vec{B}=-10$ ב. $\theta_A=161.57^\circ$, $|\vec{A}|=\sqrt{10}$, $\theta_B=-63.43^\circ$, $|\vec{B}|=\sqrt{20}$

ג. $\vec{A}\cdot\vec{B}=-10$

4) א. שאלת הוכחה.   ב. שאלת הוכחה.

5) א. $\vec{A}\cdot\vec{C}=-1$ ב. $(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=-10$ ג. $\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}=-10$

ד. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}=(-4,12)$ ה. $\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})=(-18,-9)$ ו. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}=(12,-8)$

ז. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})=36$

6) א. $\frac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{|\vec{B}|^2}=\left(\frac{-8}{10},\frac{24}{10}\right)$ ב. $\frac{(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{C}}{|\vec{C}|^2}=(-0.54,-2.69)$

7) $\alpha_{\vec{A}\vec{B}}=153.43^\circ$, $\alpha_{\vec{B}\vec{C}}=150.26^\circ$

8) שיטה 1: $\vec{A}\cdot\vec{B}=53.62$

שיטה 2: $A_x\cdot B_x+A_y\cdot B_y=53.58$

9) שאלת הוכחה.

מכפלה וקטורית בדו מימד:

רקע:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\hat{z}$$

הערות:
התוצאה של המכפלה הוקטורית היא תמיד וקטור (בניגוד לסקלרית).

נוסחה נוספת לגודל של המכפלה הוקטורית:
$\vec{A}\times\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\sin\alpha$.

α - זווית הקטנה בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$.

שאלות:

1) דוגמה-מכפלה וקטורית

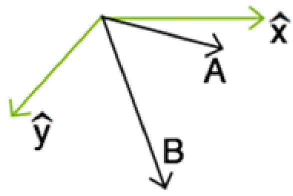
נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A}=\left(-4,1\right)$, $\vec{B}\left(2,-3\right)$.

א. חשב את $\vec{A}\times\vec{B}$ באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.
מהו גודל המכפלה?

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. חשב את $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$ שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בסינוס הזווית. (בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א).

2) מכפלה סקלרית ווקטורית בפולרי



נתונה מערכת צירים כבשרטוט.
נתונים שני וקטורים:
גודל 10, זווית $\vec{A}-20$.
גודל 15, זווית $\vec{B}-60$.

א. חשב $A\cdot B$ (מכפלה סקלארית).

ב. חשב $A\times B$ (מכפלה וקטורית).

ג. הסבר מדוע המכפלה הוקטורית נותנת את שטח המקבילית שיוצרים הווקטורים.

תשובות סופיות:

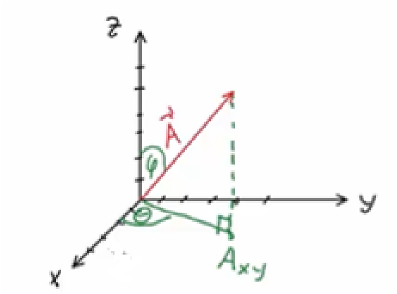
1) א. $\vec{A}\times\vec{B}=10\hat{z}$ וכן $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=10$.

ב. $\left|\vec{B}\right|=\sqrt{13}\ ,\ \theta_B=-56.31^\circ\ ,\ \left|\vec{A}\right|=\sqrt{17}\ ,\ \theta_A=165.96^\circ$ ג. $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=10$

2) א. $\vec{A}\cdot\vec{B}=150\cdot\cos(40)$ ב. $\vec{A}\times\vec{B}=-150\cdot\sin(40)\cdot\hat{z}$ ג. ראה סרטון.

וקטור בשלושה מימדים:

רקע:



$0 \le \varphi \le \pi$

$0 \le \theta \le 2\pi$

מציאת גודל הוקטור: $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

פירוק לרכיבים:

$A_z = \left|\vec{A}\right| \cos\varphi$.

$A_{xy} = \left|\vec{A}\right| \sin\varphi$.

$A_x = \left|\vec{A}\right| \sin\varphi \cos\theta$.

$A_y = \left|\vec{A}\right| \sin\varphi \sin\theta$.

שאלות:

1) שהסכום מאונך להפרש

הוכח- אם סכום של שני וקטורים מאונך להפרשם אזי אורכם שווה.

2) מציאת וקטור מאונך

נתונים 2 וקטורים: $\vec{B}(B_x, B_y, 0)$, $\vec{A}(1,4,8)$.

מצא את מרכיבי וקטור B אם נתון כי הוא ניצב לוקטור A וגודלו 10.

3) מציאת שקול וזווית עם הצירים

שני כוחות נתונים פועלים על גוף: $\vec{B}(3,6,7)$, $\vec{A}(1,4,5)$.

א. מהו הכוח השקול?

ב. מהו גודלו של הכוח השקול?

ג. מהי הזווית בין הכוח השקול ובין כל אחד מהצירים?

4) חישוב גודל זווית בקרטזי

נתונים שני וקטורים: $\vec{B}(3,4,5)$, $\vec{A}(1,5,10)$.

א. מהו גודלו של כל וקטור?

ב. מהי הזווית בין שני הוקטורים?

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) $\vec{B}=\left(-4\sqrt{\frac{100}{17}},\sqrt{\frac{100}{17}},0\right)$

3) א. $\vec{C}=(4,10,12)$ ב. $|C|=\sqrt{260}$ ג. $\alpha=75.63$, $\beta=51.67$, $\gamma=41.90$

4) א. $|\vec{A}|=\sqrt{126}$, $|\vec{B}|=\sqrt{50}$ ב. $\alpha=23°$

מכפלה וקטורית בשלושה מימדים:

רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

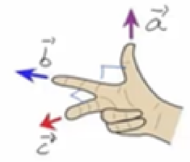
דרך 1 – דטרמיננטה:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

דרך 2 – לפי גודל וכיוון בנפרד:

גודל המכפלה - $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$

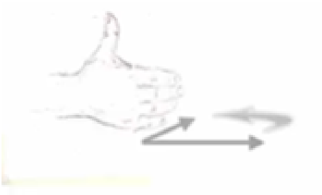
כיוון לפי כלל יד ימין -



<u>הערה</u>:

יש כמה דרכים לבצע את הכלל, אם מחליפים אצבעות לכל שלושת הוקטורים הכלל נשאר נכון (אם מחליפים מקום רק לשני וקטורים – טעות).

דרך נוספת לכלל יד ימין נקראת כלל הבורג



מסובבים את האצבעות מ-a ל-b והתוצאה בכיוון האגודל.

שאלות:

1) מכפלה וקטורית

נתונים הוקטורים: $\vec{D}(2,0,1)$, $\vec{C}(-1,2,-2)$, $\vec{B}(1,-3)$, $\vec{A}(1,2)$.

א. מצא את $\vec{A}\cdot\vec{B}$.

ב. מצא את $\vec{A}\times\vec{B}$.

ג. מצא את $\vec{C}\times\vec{D}$.

2) מקבילון

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{c}=2\hat{x}-\hat{y}$, $\vec{b}=\hat{x}+2\hat{y}-\hat{z}$, $\vec{a}=2\hat{x}-3\hat{y}+\hat{z}$

מרכיבים מהוקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ מקבילית ובוחרים את ראשית הצירים בקודקוד המקבילית (הנח כל היחידות בס"מ).

א. מצאו את מיקומו של הקודקוד שמול הקודקוד שבראשית הצירים.

ב. מצאו את אורכי האלכסונים של המקבילית.

ג. מצאו את שטח המקבילית.

ד. יוצרים מקבילון על ידי הוספת הוקטור $\vec{c}$ למקבילית.
חשבו את גובה המקבילון המאונך למקבילית.
רמז: השתמש ב- $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{A}\cdot\vec{B}=-5$ ב. $\vec{A}\times\vec{B}=-5\hat{z}$ ג. $\vec{C}\times\vec{D}=2\hat{x}-3\hat{y}-4\hat{z}$

2) א. $\vec{r}_1=(3,-1,0)$ ב. $|\vec{r}_1|=\sqrt{10}$, $|\vec{r}_2|=\sqrt{30}$ ג. $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{59}\text{c.m}^2$

ד. $\tilde{h}=0.13\text{c.m}$