

לימודי רפואה באיטליה אוניברסיטת ברשה

פרק 4 - וקטורים

תוכן העניינים

1. הגדרות סימונים והצגות 1
2. פעולות בין וקטורים 5
3. מכפלה סקלרית 8
4. וקטור יחידה 11
5. מכפלה וקטורית בדו-מימד 12
6. וקטור בשלושה מימדים (ללא ספר) 13
7. מכפלה וקטורית בשלושה מימדים 13
8. חיבור וחסור וקטורים בשיטת המקבילית 14
9. תרגילים נוספים 16

הגדרות סימונים והצגות:

שאלות:

(1) הצגה פולרית

צייר את הוקטורים הבאים על גבי מערכת צירים:

שם הוקטור	גודל הוקטור	זווית הוקטור עם ציר ה- x
\vec{A}	$ \vec{A} = 2$	$\theta_A = 30^\circ$
\vec{B}	$ \vec{B} = 4$	$\theta_B = 30^\circ$
\vec{C}	$ \vec{C} = 2$	$\theta_C = 90^\circ$
\vec{D}	$ \vec{D} = 4$	$\theta_D = 120^\circ$
\vec{E}	$ \vec{E} = 2$	$\theta_E = 300^\circ$
\vec{F}	$ \vec{F} = 2$	$\theta_F = -60^\circ$

(2) הצגה קרטזית

צייר על מערכת צירים את הוקטורים הבאים, רשום את רכיבי הוקטורים וציין באיזה רביע נמצא כל וקטור:

$$\vec{A} = (1, 2), \vec{B} = (-2, 3), \vec{C} = (-3, -2), \vec{D} = (2, -1)$$

(3) מעבר מפולרי לקרטזי

הגודל של כל אחד מהוקטורים הבאים הוא 2.

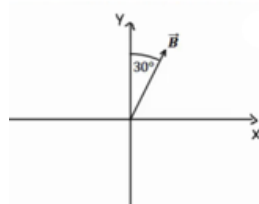
רשום כל אחד מהוקטורים בהצגה הקרטזית שלו (פרק את הוקטורים הבאים לרכיבים):

א.

ב.

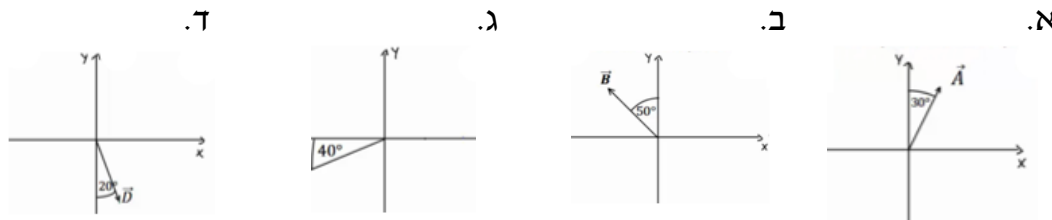
ג.

ד.



4) דרך שנייה לפירוק לרכיבים

הגודל של כל אחד מהוקטורים הבאים הוא 3.
 רשום כל אחד מהוקטורים הצגה הקרטזית שלו (פרק את הוקטורים הבאים לרכיבים):

**5) פירוק לרכיבים**

באיור הבא, גודלו של הוקטור \vec{A} הוא 4, וגודלו של הוקטור \vec{B} הוא 5.
 מצא את הרכיבים הקרטזיים של כל וקטור:



פתור פעם אחת באמצעות הזוויות שנתונות באיור, ופעם אחת באמצעות הזווית עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

6) מקרטזי לפולרי

מצא את הגודל והכיוון של הוקטורים הבאים:

א. $\vec{A} = (2, -1)$

ב. $\vec{B} = (-0.5, -2)$

7) מקרטזי לפולרי

שרטט את הוקטורים הבאים על מערכת צירים.
 מצא את הגודל והכיוון של כל אחד מהוקטורים.
 את הכיוון תאר ע"י הזווית של הוקטור עם ציר ה- x החיובי.

א. $\vec{A} = (2, 3)$

ב. $\vec{B} = (-1, 2)$

ג. $\vec{C} = (0, -3)$

ד. $\vec{D} = (2, -2)$

ה. $E_x = 2$, $|\vec{E}| = 3$ הוקטור ברביע הראשון.

ו. $E_y = -1$, $|\vec{E}| = 3$ הוקטור ברביע השלישי.

תשובות סופיות:

1) ראו שרטוט:



2) ראו שרטוט:



$\vec{A} = (1.88, 0.68)$, $\vec{B} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{C} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\vec{D} = (1, -\sqrt{3})$ (3)

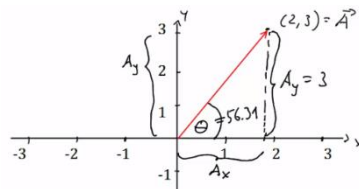
$\vec{C} = (-2.30, -1.93)$.ג $\vec{B} = (-2.30, 1.93)$.ב $\vec{A} = \left(\frac{3}{2}, 2.60\right)$.א (4)

$\vec{D} = (-2.30, -1.93)$.ד

$\vec{B} = (-4.33, -2.5)$.ב $\vec{A} = (-3.28, 2.29)$.א (5)

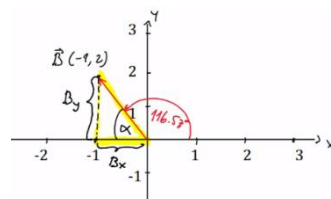
$\theta_B = 255.96^\circ$; $|\vec{B}| = 2.06$.ב $\theta_A = -26.57 = 333.43^\circ$; $|\vec{A}| = \sqrt{5}$.א (6)

$\theta_A = 56.31^\circ$; $|\vec{A}| = \sqrt{13}$



7) א. שרטוט:

$\theta_B = 116.57^\circ$; $|\vec{B}| = \sqrt{5}$



ב. שרטוט:

$$\theta_C = 270^\circ ; |\vec{C}| = 3$$



ג. שרטוט:

$$\theta_D = 315^\circ = -45^\circ ; |\vec{D}| = \sqrt{8}$$



ד. שרטוט:

$$\theta_E = 48.19^\circ ;$$



ה. שרטוט:

$$\theta_E = 199.47^\circ ;$$



ו. שרטוט:

פעולות בין וקטורים:

שאלות:

- (1) חיבור וקטורים לפי סימונים
מצא את: $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{E}$.



- (2) דוגמה 1
נתונים הוקטורים הבאים:

$$|\vec{A}| = 3, \theta_A = 30^\circ$$

$$|\vec{B}| = 2, \theta_B = -30^\circ$$

$$|\vec{C}| = 3, \theta_C = 180^\circ$$

- א. שרטט את הווקטורים על גבי מערכת צירים.
ב. שרטט את גודלן וכיוונן של הווקטור: $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.
שרטט את הווקטור \vec{D} על אותה מערכת צירים.

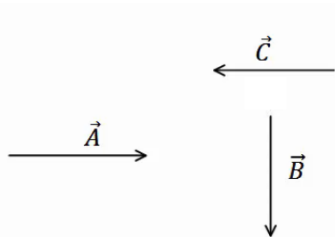
- (3) דוגמה 2



- הגודל של הוקטורים באיור הוא: $|\vec{A}| = 5, |\vec{B}| = 4, |\vec{C}| = 5$.
מצא את הוקטור השקול (סכום הוקטורים): $\vec{D} = \vec{C} + \vec{A} + \vec{B}$.

- (4) חיסור לפי סימונים

- בציור נתונים הוקטורים: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.
מצא את: $\vec{D} = \vec{B} - \vec{C} - \vec{A}$.



5) דוגמה 1

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (3,5), \vec{B} = (-1,4), \vec{C} = (0,2)$

מצא את :

א. $\vec{D} = -2\vec{B}$

ב. $\vec{E} = 3\vec{A} - 2\vec{C} - \vec{B}$

ג. $\vec{F} = -2(\vec{A} + \vec{B}) + 3\vec{C}$

6) דוגמה 2

גודלם של הוקטורים באיור הבא הם : $|\vec{A}| = 5, |\vec{B}| = 4, |\vec{C}| = 3$



א. מצא את גודלו וכיוונו של $\vec{D} = -2\vec{B}$

שרטט את \vec{D} על מערכת צירים.

ב. מצא את גודלו וכיוונו של $\vec{E} = 2\vec{A} - 3\vec{B} - 4\vec{C}$

שרטט את \vec{E} על מערכת הצירים.

7) דוגמה 3

גודלו של הוקטור \vec{A} הוא 2 והזווית שהוא יוצר עם ציר ה- x החיובי היא 30° .

א. שרטט את הוקטור במערכת הצירים.

ב. מצא את $\vec{B} = 3 \cdot \vec{A}$ ללא פירוק של \vec{A} לרכיבים. שרטט את \vec{B} על אותה מערכת.

ג. מצא את הרכיבים של \vec{A} .

ד. חשב שוב את $\vec{B} = 3 \cdot \vec{A}$. הפעם דרך הרכיבים של \vec{A} .

ה. מצא את גודלו וכיוונו של \vec{B} מהרכיבים שמצאת בסעיף ד'.

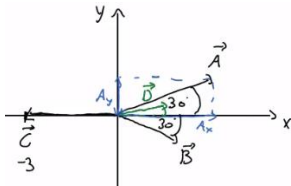
הראה כי התוצאה זהה לסעיף ב'.

תשובות סופיות:

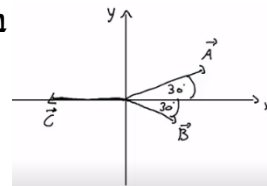
(1)



ב. $|\vec{D}| = 1.42, \theta_D = 20.60^\circ$



(2) א.



(3) $|\vec{D}| = 3.46, \theta_D = 58.84^\circ$

(4)

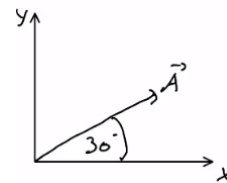
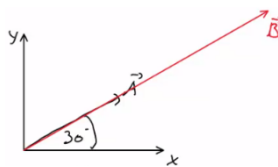


(5) א. $\vec{D} = (2, -8)$ ב. $\vec{E} = (10, 7)$ ג. $\vec{F} = (-4, -12)$

(6) א. $|\vec{D}| = 8, \theta_D = -20^\circ$ ב. $|\vec{E}| = 23.75, \theta_E = 37.23^\circ$



(7) א. $|\vec{B}| = 6, \theta_B = \theta_A = 30^\circ$ ג. $\vec{A} = (\sqrt{3}, 1)$



ד. $\vec{B} = (3\sqrt{3}, 3)$ ה. ראה סרטון.

מכפלה סקלרית:

שאלות:

(1) דוגמה 1

מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית בין הוקטורים הנתונים בכל המקרים הבאים:

א. $\vec{A} = (-1, 2)$, $\vec{B} = (2, 2)$

ב.



(2) דוגמה 2

בדוק עבור זוגות הוקטורים הבאים האם הם מאונכים:

א. $\vec{A} = (1, 4)$, $\vec{B} = (-2, 5)$

ב. $\vec{A} = (1, 4)$, $\vec{B} = (8, -2)$

ג. $\vec{A} = (-1, -2)$, $\vec{B} = (-2, 1)$

ד. שרטט כל זוג וקטורים מאונכים על מערכת צירים.

חשב את זוויות הוקטורים עם הצירים והראה שהזווית בין הוקטורים היא אכן 90 מעלות.

(3) דוגמה 3

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A} = (-3, 1)$, $\vec{B} = (2, -4)$.

א. מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. מצא את המכפלה הסקלרית שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בקוסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

דוגמה 4 (4)

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-3, 1)$, $\vec{B} = (2, -4)$

א. הראה כי החישוב של $\vec{A} \cdot \vec{B}$ זהה לחישוב $\vec{B} \cdot \vec{A}$.

ב. הוכח בצורה כללית כי המכפלה הסקלרית היא פעולה קומוטטיבית (הדרכה : רשום את הוקטורים בצורה כללית עם נעלמים).

דוגמה 5 (5)

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (2, 1)$, $\vec{B} = (-3, 2)$, $\vec{C} = (1, -3)$

חשב את :

א. $\vec{A} \cdot \vec{C}$

ב. $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C}$

ג. $\vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$

ד. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$

ה. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$

ו. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}$

ז. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$

דוגמה 6 (6)

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-2, 2)$, $\vec{B} = (1, -3)$, $\vec{C} = (1, 5)$

חשב את :

א. $\frac{(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{|\vec{B}|^2}$

ב. $\frac{(\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{C}}{|\vec{C}|^2}$

דוגמה 7 (7)

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-2, 2)$, $\vec{B} = (1, -3)$, $\vec{C} = (1, 5)$

מצא את הזווית בין \vec{A} ל- \vec{B} ובין \vec{B} ל- \vec{C} .

תשובות סופיות:

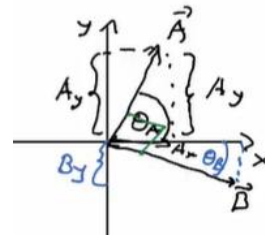
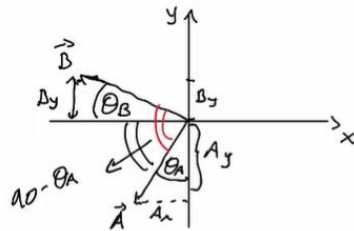
(1) א. 2 ב. -5.13

(2) א. \vec{A} לא מאונך ל- \vec{B} .

ד. ב. $\theta_A = 75.96^\circ, \theta_B = 14.04^\circ$.

ב. מאונכים. ג. מאונכים.

ד. ג. $\theta_A = 26.57^\circ, \theta_B = 26.57^\circ$.



(3) א. $\vec{A} \cdot \vec{B} = -10$ ב. $|\vec{A}| = \sqrt{10}, \tilde{\theta}_A = 161.57^\circ, |\vec{B}| = \sqrt{20}, \tilde{\theta}_B = -63.43^\circ$

ג. $\vec{A} \cdot \vec{B} = -10$

(4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(5) א. -1 ב. -10 ג. -10 ד. (-4, 12) ה. (-18, -9)

ו. (12, -8) ז. 36

(6) א. (-0.8, 2.4) ב. (-0.54, -2.69)

(7) $\alpha_{\vec{A}\vec{B}} = 153.43^\circ, \alpha_{\vec{B}\vec{C}} = 150.26^\circ$

וקטור יחידה:

שאלות:

1) דוגמה וקטור יחידה
מצא וקטורי יחידה בכיוון של הוקטורים הבאים:

א. $\vec{A} = (-2, -3)$

ב. $\vec{B} = (3, 4)$

תשובות סופיות:

1) א. $(-0.55, -0.83)$ ב. $(0.6, 0.8)$

מכפלה וקטורית בדו-מימד:

שאלות:

(1) דוגמה – מכפלה וקטורית

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A} = (-4, 1)$, $\vec{B} = (2, -3)$.

א. חשב את: $\vec{A} \times \vec{B}$ באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.
מהו גודל המכפלה?

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. חשב את: $|\vec{A} \times \vec{B}|$ שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

תשובות סופיות:

(1) א. 10 ב. $\theta_B = -56.31^\circ$, $|\vec{B}| = \sqrt{13}$, $\theta_A = 165.96^\circ$, $|\vec{A}| = \sqrt{17}$ ג. 10

מכפלה וקטורית בשלושה מימדים:

שאלות:

(1) מכפלה וקטורית

נתונים הוקטורים: $\vec{A}(1,2)$, $\vec{B}(1,-3)$, $\vec{C}(-1,2,-2)$, $\vec{D}(2,0,1)$

א. מצא את: $\vec{A} \cdot \vec{B}$

ב. מצא את: $\vec{A} \times \vec{B}$

ג. מצא את: $\vec{C} \times \vec{D}$

תשובות סופיות:

(1) א. -5 ב. $\hat{z}(-5)$ ג. $\vec{C} \times \vec{D} = 2\hat{x} - 3\hat{y} - 4\hat{z}$

חיבור וחיסור וקטורים בשיטת המקבילית:

שאלות:

(1) חיבור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים \vec{A} ו- \vec{B} . גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_A = 130^\circ$. גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_B = 60^\circ$. שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את: $\vec{A} + \vec{B}$. באמצעות שיטת המקבילית.

(2) חיסור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים \vec{A} ו- \vec{B} . גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_A = 130^\circ$. גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_B = 60^\circ$. שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את: $\vec{A} - \vec{B}$. באמצעות שיטת המקבילית.

(3) מציאת אורך של שקול

אורכם של שני וקטורים הוא 5 ו-10 ס"מ. הזווית ביניהם היא 30 מעלות. מהו אורכו של הוקטור השקול שלהם (סכום הוקטורים)?

(4) מציאת זווית בין שני וקטורים

נתונים שני וקטורים שאורכם 10 ו-13 מטר. אורך השקול שלהם הוא 20 מטר. מצא את הזווית בין הווקטורים.

תשובות סופיות:

 (1) 108.1° , 10.1

 (2) 159.5° , 7.62

 (3) $a \approx 14.6c.m$

 (4) $\theta = 60^\circ$

תרגילים נוספים:

שאלות:

(1) נתונים הווקטורים הבאים: $\vec{A} = 5, 20^\circ$, $\vec{B} = 2, 150^\circ$, $\vec{D} = 10, 220^\circ$.
מצאו את גודל וכיוון הווקטור \vec{C} אם: $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{D}$.

(2) באיור הבא נתונים שלושה וקטורים.
מצאו את גודל הווקטור \vec{A} ואת גודל הווקטור \vec{B} ,
אם נתון שגודל הווקטור \vec{C} הוא 50 ו- $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.



תשובות סופיות:

(1) $\vec{C} = 14, 221^\circ$

(2) $|\vec{A}| \approx 515$, $|\vec{B}| \approx 490$