

# פיזיקה 1 ב

פרק 2 - וקטורים

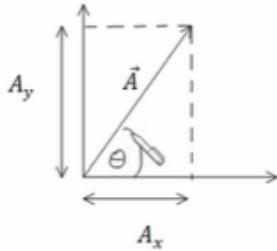
תוכן העניינים

1. הגדרות ופעולות בסיסיות ..... 1
2. מכפלה סקלרית ..... 5
3. וקטור יחידה ..... 9
4. מכפלה וקטורית בדו מימד ..... 11
5. וקטור בשלושה מימדים ..... 13
6. מכפלה וקטורית בשלושה מימדים ..... 15

## הגדרות ופעולות בסיסיות:

רקע:

פירוק וקטור לרכיבים:



היטל על ציר ה- $x$  או רכיב ה- $x$  של  $A$ :  $A_x = |\vec{A}| \cos \theta$

היטל על ציר ה- $y$  או רכיב ה- $y$  של  $A$ :  $A_y = |\vec{A}| \sin \theta$

המעבר ההפוך:  $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ ,  $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

הצגת וקטור באמצעות גודל וכיוון נקראת הצגה פולרית.  
הצגת וקטור באמצעות רכיבי ה- $x$  וה- $y$  נקראת הצגה קרטזית.

שאלות:

(1) חיבור וחיסור בקרטזי

נתונים 3 וקטורים:  $\vec{A}(1,3)$ ,  $\vec{B}(4,2)$ ,  $\vec{C}(3,5)$

א. חשב מהו  $A+B+C$ ?

ב. חשב מהו  $A-B-C$ ?

ג. חשב מהו  $2A+3B-4C$ ?

(2) מקרטזי לפולרי

נתון הוקטור:  $\vec{A}(4,6)$

א. הצג את הוקטור בצורתו הפולרית (גודל וכיוון).

ב. מהו וקטור היחידה?

(3) מפולרי לקרטזי עם יחידה

נתון הוקטור  $\vec{A}$  בהצגה פולרית.

גודלו  $\sqrt{52}$  וכיוונו  $56.3$  מעלות.

א. הצג את הוקטור בצורת קרטזית.

ב. מהו וקטור היחידה?

**(4) מקרטזי לפולרי ברביע שני**נתון הוקטור:  $\vec{A}(3, -4)$ .

- א. הצג את הוקטור בצורתו הפולרית (גודל וכיוון).  
 ב. מהו וקטור היחידה?

**(5) מפולרי לקרטזי**נתון הוקטור  $\vec{A}$  בצורתו הפולרית. גודלו 5 וכיוונו 120°.

- א. הצג את הוקטור בצורתו הקרטזית.  
 ב. מצא את וקטור היחידה.

**(6) מקרטזי לפולרי רביע שלישי**נתון הוקטור:  $\vec{A}(-2, -4)$ .

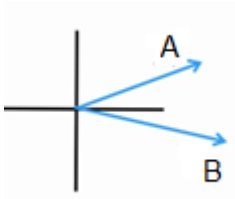
הצג את הוקטור בצורתו הפולרית.

**(7) חיבור בפולרי**

נתונים שני וקטורים:

הוקטור A שגודלו 10 וכיוונו  $30^\circ$ ,הוקטור B שגודלו לא ידוע וכיוונו  $350^\circ$ .

מהו גודלו של הוקטור B אם נתון שסכום הוקטורים ייתן וקטור ללא רכיב לציר ה-y?

**(8) חיבור וקטורים בפולרי**

נתונים שני וקטורים בהצגה פולרית:

 $\vec{A}$  בגודל 10 ובכיוון  $30^\circ$ , $\vec{B}$  בגודל 8 ובכיוון  $60^\circ$ .נתון:  $A+B=C$ .

מצא את וקטור C.

**(9) משושה של וקטורים**

מצא את הוקטור השקול לשני המצבים הבאים:

הנח כי הוקטורים יוצרים משושה שווה צלעות וגודל כל צלע הוא L.



**(10) וקטור בין שתי נקודות**

הוקטור  $\vec{A}$  הוא וקטור מהנקודה  $(x_1, y_1, z_1)$  אל הנקודה  $(x_2, y_2, z_2)$ .  
 רשום ביטוי לרכיבים של הוקטור ומצא את גודלו.

**(11) חיבור באמצעות מקבילית**

נתונים הוקטורים  $\vec{A}$  ו- $\vec{B}$ .

גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא:  $\theta_A = 130^\circ$ .

גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא:  $\theta_B = 60^\circ$ .

שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את  $\vec{A} + \vec{B}$  באמצעות שיטת המקבילית.

**(12) חיסור באמצעות מקבילית**

נתונים הוקטורים  $\vec{A}$  ו- $\vec{B}$ .

גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא  $\theta_A = 130^\circ$ .

גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא  $\theta_B = 60^\circ$ .

שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את  $\vec{A} - \vec{B}$  באמצעות שיטת המקבילית.

**(13) מציאת אורך של שקול**

אורכם של שני וקטורים הוא 5 ו-10 ס"מ.

הזווית ביניהם היא 30 מעלות.

מהו אורכו של הוקטור השקול שלהם (סכום הוקטורים)?

**(14) מציאת זווית בין שני וקטורים**

נתונים שני וקטורים שאורכם 10 ו-13 מטר.

אורך השקול שלהם הוא 20 מטר.

מצא את הזווית בין הוקטורים.

## תשובות סופיות:

- א. (8,10)    ב. (-6,-4)    ג. (2,-8)    (1)
- א.  $|A| = \sqrt{52}$ ,  $\alpha = 56.3$     ב.  $\hat{A} = \left( \frac{4}{\sqrt{52}}, \frac{6}{\sqrt{52}} \right)$     (2)
- א.  $\vec{A}(4,6)$     ב.  $\hat{A} = 1$     (3)
- א.  $|A| = 5$ ,  $\alpha = 306.88$     ב.  $\hat{A} = \left( \frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right)$     (4)
- א.  $\vec{A}(-2.5, 4.33)$     ב.  $\hat{A} = \left( \frac{-2.5}{5}, \frac{4.33}{5} \right)$     (5)
- א.  $|A| = \sqrt{20}$ ,  $\alpha = 243.4$     (6)
- ב.  $B = 28.79$     (7)
- א.  $\vec{C}(12.66, 11.92)$     (8)
- ב.  $L \cdot 4 \cos(30)$     (9)
- א.  $|\vec{A}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ,  $\vec{A} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$     (10)
- א.  $C = 10.1$ ,  $\theta_c = 108.1^\circ$     (11)
- א.  $C = 7.62$ ,  $\theta_c = 159.5^\circ$     (12)
- א.  $|\vec{a}| = 14.6 \text{ c.m}$     (13)
- א.  $\theta = 60^\circ$     (14)

## מכפלה סקלרית:

### רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

$\alpha$  - זווית בין הוקטורים.

### הערות:

תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).

$$\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} : \text{נוסחה למציאת זווית בין שני וקטורים}$$

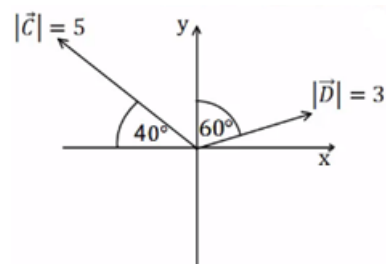
### שאלות:

#### (1) דוגמה 1

מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית בין הוקטורים הנתונים בכל המקרים הבאים:

א.  $\vec{A} = (-1, 2)$ ,  $\vec{B} = (2, 2)$

ב.



#### (2) דוגמה 2

בדוק עבור זוגות הוקטורים הבאים האם הם מאונכים:

א.  $\vec{A} = (1, 4)$ ,  $\vec{B} = (-2, 5)$

ב.  $\vec{A} = (1, 4)$ ,  $\vec{B} = (8, -2)$

ג.  $\vec{A} = (-1, -2)$ ,  $\vec{B} = (-2, 1)$

ד. שרטט כל זוג וקטורים מאונכים על מערכת צירים, חשב את זוויות הוקטורים עם הצירים והראה שהזווית בין הוקטורים היא אכן  $90^\circ$ .

**3 דוגמה 3**

נתונים הוקטורים הבאים :  $\vec{A} = (-3, 1)$  ,  $\vec{B} = (2, -4)$

- מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.
- מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.
- מצא את המכפלה הסקלרית שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בקוסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

**4 דוגמה 4**

נתונים הוקטורים הבאים :  $\vec{A} = (-3, 1)$  ,  $\vec{B} = (2, -4)$

- הראה כי החישוב של  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  זהה לחישוב  $\vec{B} \cdot \vec{A}$ .
- הוכח בצורה כללית כי המכפלה הסקלרית היא פעולה קומוטטיבית. (הדרכה : רשום את הוקטורים בצורה כללית עם נעלמים).

**5 דוגמה 5**

נתונים הוקטורים הבאים :  $\vec{A} = (2, 1)$  ,  $\vec{B} = (-3, 2)$  ,  $\vec{C} = (1, -3)$

חשב את :

א.  $\vec{A} \cdot \vec{C}$

ב.  $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C}$

ג.  $\vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$

ד.  $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$

ה.  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$

ו.  $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}$

ז.  $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$

**6 דוגמה 6**

נתונים הוקטורים הבאים :  $\vec{A} = (-2, 2)$  ,  $\vec{B} = (1, -3)$  ,  $\vec{C} = (1, 5)$

חשב את :

א.  $\frac{(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{|\vec{B}|^2}$

ב.  $\frac{(\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{C}}{|\vec{C}|^2}$

**7 דוגמה 7**

נתונים הוקטורים הבאים :  $\vec{A} = (-2, 2)$  ,  $\vec{B} = (1, -3)$  ,  $\vec{C} = (1, 5)$   
 מצא את הזווית בין  $\vec{A}$  ל-  $\vec{B}$  לבין  $\vec{B}$  ל-  $\vec{C}$ .

**8 מכפלה סקלרית בשתי השיטות**

נתונים שני וקטורים :

הוקטור  $\vec{A}$  שגודלו 7 וכיוונו 30.

והוקטור  $\vec{B}$  שגודלו 10 וכיוונו 70.

מצא את תוצאת המכפלה הסקלארית שלהם בעזרת שתי שיטות שונות.

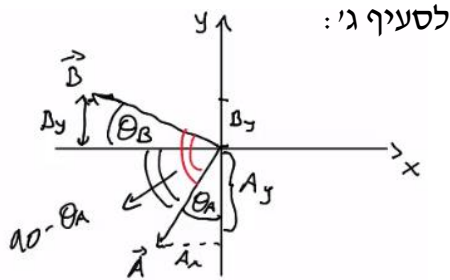
**9 הוכחת משפט פיתגורס המורחב**

הוכח את משפט פיתגורס המורחב (במשולש שאינו ישר זווית) :

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \alpha$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 2$       ב.  $\vec{C} \cdot \vec{D} = -5.13$
- (2) א.  $\vec{A}$  לא מאונך ל- $\vec{B}$ .      ב. הוקטורים מאונכים.      ג. הוקטורים מאונכים.



הזוויות:  $\theta_A = 26.57^\circ$ ,  $\theta_B = 26.57^\circ$ .

הזוויות:  $\theta_A = 75.96^\circ$ ,  $\theta_B = 14.04^\circ$ .

(3) א.  $\vec{A} \cdot \vec{B} = -10$       ב.  $|\vec{B}| = \sqrt{20}$ ,  $\theta_B = -63.43^\circ$ ,  $|\vec{A}| = \sqrt{10}$ ,  $\theta_A = 161.57^\circ$

ג.  $\vec{A} \cdot \vec{B} = -10$

(4) א. שאלת הוכחה.      ב. שאלת הוכחה.

(5) א.  $\vec{A} \cdot \vec{C} = -1$       ב.  $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = -10$       ג.  $\vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C} = -10$

ד.  $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} = (-4, 12)$       ה.  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) = (-18, -9)$       ו.  $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} = (12, -8)$

ז.  $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) = 36$

(6) א.  $\frac{(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{|\vec{B}|^2} = \left( \frac{-8}{10}, \frac{24}{10} \right)$       ב.  $\frac{(\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{C}}{|\vec{C}|^2} = (-0.54, -2.69)$

(7)  $\alpha_{\vec{BC}} = 150.26^\circ$ ,  $\alpha_{\vec{AB}} = 153.43^\circ$

(8) שיטה 1:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 53.62$

שיטה 2:  $A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = 53.58$

(9) שאלת הוכחה.

## וקטור יחידה:

רקע:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

שאלות:

### (1) דוגמה וקטור יחידה

מצא וקטורי יחידה בכיוון של הוקטורים הבאים:

א.  $\vec{A} = (-2, -3)$

ב.  $\vec{B} = (3, 4)$



### (2) הטלת וקטור יחידה על וקטור יחידה

נתון הוקטור  $\vec{A}$  שבשרטוט.

א. מהו היטל הוקטור על ציר ה-x (וקטור יחידה)?

ב. מהו היטל הוקטור על ציר ה-y (וקטור יחידה)?

ג. הסבר כיצד מחשבים היטל הוקטור על הוקטור  $\vec{B}(2,1)$ .

ד. הסבר במילים את משמעות ההטלה של וקטור על וקטור.



### (3) חישוב וקטור יחידה

נתון הוקטור:  $\vec{A}(2,3,4)$ .

א. מהו גודלו של הוקטור?

ב. מהו וקטור היחידה?

### (4) וקטור בזמן

נתון הוקטור  $\vec{A}(t)$  במישור דו מימדי כך ש-  $|\vec{A}(t)| = A_0 \sin(t)$

ו-  $\theta(t) = t$  כאשר  $t \in [0, \pi]$  ו-  $A_0$  קבוע.

א. מצא את הרכיבים הקרטזיים של  $\vec{A}(t)$  כתלות בזמן.

ב. מצא את  $\frac{d\vec{A}}{dt}$ .

ג. מצא את  $\frac{dA}{dt}$ .

**תשובות סופיות:**

$$(1) \quad \hat{A} = (-0.55, -0.83) \text{ א.} \quad \hat{B} = (0.6, 0.8) \text{ ב.}$$

$$(2) \quad \vec{A}_x = (4, 0) \text{ א.} \quad \vec{A}_y = (0, 3) \text{ ב.} \quad \text{ג. ראה סרטון}$$

$$(3) \quad |A| = \sqrt{29} \text{ א.} \quad \hat{A} = \left( \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}} \right) \text{ ב.}$$

$$(4) \quad A_x(t) = \frac{1}{2} A_0 \sin 2t, \quad A_y(t) = A_0 \sin^2 t \text{ א.} \quad A_0 (\cos 2t\hat{x} + \sin 2t\hat{y}) \text{ ב.}$$

ג.  $-\sin t\hat{x} + \cos t\hat{y}$

## מכפלה וקטורית בדרך מימד:

**רקע:**

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}$$

**הערות:**

התוצאה של המכפלה הוקטורית היא תמיד וקטור (בניגוד לסקלרית).

נוסחה נוספת לגודל של המכפלה הוקטורית:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin \alpha$$

$\alpha$  - זווית הקטנה בין  $\vec{A}$  ל-  $\vec{B}$ .

**שאלות:**

### 1) דוגמה-מכפלה וקטורית

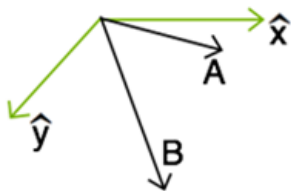
נתונים הוקטורים הבאים:  $\vec{A} = (-4, 1)$ ,  $\vec{B} = (2, -3)$

א. חשב את  $\vec{A} \times \vec{B}$  באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות. מהו גודל המכפלה?

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. חשב את  $|\vec{A} \times \vec{B}|$  שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים

בסינוס הזווית. (בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א).



### 2) מכפלה סקלרית ווקטורית בפולרי

נתונה מערכת צירים כבשרטוט.

נתונים שני וקטורים:

גודל 10, זווית  $20^\circ$  -  $\vec{A}$

גודל 15, זווית  $60^\circ$  -  $\vec{B}$

א. חשב  $A \cdot B$  (מכפלה סקלרית).

ב. חשב  $A \times B$  (מכפלה וקטורית).

ג. הסבר מדוע המכפלה הוקטורית נותנת את שטח המקבילית שיוצרים הווקטורים.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \vec{A} \times \vec{B} = 10\hat{z} \quad \text{וכן} \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = 10$$

$$(2) \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = 150 \cdot \cos(40) \quad \text{א.} \quad \vec{A} \times \vec{B} = -150 \cdot \sin(40) \cdot \hat{z} \quad \text{ב.} \quad \text{ג.} \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = 10$$

$$\text{ב.} \quad |\vec{A}| = \sqrt{17}, \theta_A = 165.96^\circ, |\vec{B}| = \sqrt{13}, \theta_B = -56.31^\circ$$

$$\text{ג.} \quad \text{ראה סרטון.}$$

## וקטור בשלושה מימדים:

רקע:



$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

מציאת גודל הוקטור:  $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

פירוק לרכיבים:

$$A_z = |\vec{A}| \cos \varphi$$

$$A_{xy} = |\vec{A}| \sin \varphi$$

$$A_x = |\vec{A}| \sin \varphi \cos \theta$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin \varphi \sin \theta$$

## שאלות:

- (1) שהסכום מאונך להפרש הוכח- אם סכום של שני וקטורים מאונך להפרשם אזי אורכם שווה.
- (2) מציאת וקטור מאונך נתונים 2 וקטורים:  $\vec{A}(1,4,8)$ ,  $\vec{B}(B_x, B_y, 0)$ . מצא את מרכיבי וקטור B אם נתון כי הוא ניצב לוקטור A וגודלו 10.
- (3) מציאת שקול זווית עם הצירים שני כוחות נתונים פועלים על גוף:  $\vec{A}(1,4,5)$ ,  $\vec{B}(3,6,7)$ .
- א. מהו הכוח השקול?  
 ב. מהו גודלו של הכוח השקול?  
 ג. מהי הזווית בין הכוח השקול ובין כל אחד מהצירים?
- (4) חישוב גודל זווית בקרטזי נתונים שני וקטורים:  $\vec{A}(1,5,10)$ ,  $\vec{B}(3,4,5)$ .
- א. מהו גודלו של כל וקטור?  
 ב. מהי הזווית בין שני הוקטורים?

## תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2)  $\vec{B} = \left( -4\sqrt{\frac{100}{17}}, \sqrt{\frac{100}{17}}, 0 \right)$
- (3) א.  $\vec{C} = (4, 10, 12)$  ב.  $|C| = \sqrt{260}$  ג.  $\alpha = 75.63$ ,  $\beta = 51.67$ ,  $\gamma = 41.90$
- (4) א.  $|\vec{A}| = \sqrt{126}$ ,  $|\vec{B}| = \sqrt{50}$  ב.  $\alpha = 23^\circ$

## מכפלה וקטורית בשלושה מימדים:

רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

דרך 1 – דטרמיננטה:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

דרך 2 – לפי גודל וכיוון בנפרד:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

כיוון לפי כלל יד ימין -



הערה:

יש כמה דרכים לבצע את הכלל, אם מחליפים אצבעות לכל שלושת הוקטורים הכלל נשאר נכון (אם מחליפים מקום רק לשני וקטורים – טעות).

דרך נוספת לכלל יד ימין נקראת כלל הבורג



מסובבים את האצבעות מ- $a$  ל- $b$  והתוצאה בכיוון האגודל.

## שאלות:

## (1) מכפלה וקטורית

נתונים הוקטורים:  $\vec{A}(1,2)$ ,  $\vec{B}(1,-3)$ ,  $\vec{C}(-1,2,-2)$ ,  $\vec{D}(2,0,1)$ .

- א. מצא את  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ .
- ב. מצא את  $\vec{A} \times \vec{B}$ .
- ג. מצא את  $\vec{C} \times \vec{D}$ .

## (2) מקבילון

נתונים הוקטורים הבאים:  $\vec{a} = 2\hat{x} - 3\hat{y} + \hat{z}$ ,  $\vec{b} = \hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$ ,  $\vec{c} = 2\hat{x} - \hat{y}$ .

מרכיבים מהוקטורים  $\vec{a}$  ו- $\vec{b}$  מקבילית ובוחרים את ראשית הצירים בקודקוד המקבילית (הנח כל היחידות בס"מ).

- א. מצאו את מיקומו של הקודקוד שמול הקודקוד שבראשית הצירים.
  - ב. מצאו את אורכי האלכסונים של המקבילית.
  - ג. מצאו את שטח המקבילית.
  - ד. יוצרים מקבילון על ידי הוספת הוקטור  $\vec{c}$  למקבילית. חשבו את גובה המקבילון המאונך למקבילית.
- רמז: השתמש ב- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\vec{A} \cdot \vec{B} = -5$       ב.  $\vec{A} \times \vec{B} = -5\hat{z}$       ג.  $\vec{C} \times \vec{D} = 2\hat{x} - 3\hat{y} - 4\hat{z}$
- (2) א.  $\vec{r}_1 = (3, -1, 0)$       ב.  $|\vec{r}_1| = \sqrt{10}$ ,  $|\vec{r}_2| = \sqrt{30}$       ג.  $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{59}c.m^2$
- ד.  $\tilde{h} = 0.13c.m$