

פיזיקה 1 לתעשייה וניהול 10012011

פרק 2 - וקטורים

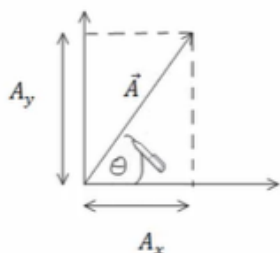
תוכן העניינים

1	1. הגדרות ופעולות בסיסיות
5	2. מכפלה סקלרית
9	3. וקטור יחידה
11	4. מכפלה וקטורית בדו מימד
13	5. וקטור בשלושה מימדים
15	6. מכפלה וקטורית בשלושה מימדים
17	7. וקטורים קולינריים
18	8. גרדיאנט ורוטור

הגדרות ופעולות בסיסיות:

רקע:

פירוק וקטור לרכיבים:



היטל על ציר ה- x או רכיב ה- x של A : $A_x = |\vec{A}| \cos \theta$

היטל על ציר ה- y או רכיב ה- y של A : $A_y = |\vec{A}| \sin \theta$

המעבר ההפוך: $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$

הצגת וקטור באמצעות גודל וכיוון נקראת הצגה פולרית.
הצגת וקטור באמצעות רכיבי ה- x וה- y נקראת הצגה קרטזית.

שאלות:

(1) חיבור וחיסור בקרטזי

נתונים 3 וקטורים: $\vec{A}(1,3)$, $\vec{B}(4,2)$, $\vec{C}(3,5)$

א. חשב מהו $A+B+C$?

ב. חשב מהו $A-B-C$?

ג. חשב מהו $2A+3B-4C$?

(2) מקרטזי לפולרי

נתון הוקטור: $\vec{A}(4,6)$

א. הצג את הוקטור בצורתו הפולרית (גודל וכיוון).

ב. מהו וקטור היחידה?

(3) מפולרי לקרטזי עם יחידה

נתון הוקטור \vec{A} בהצגה פולרית.

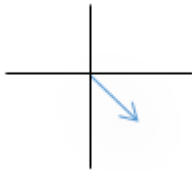
גודלו $\sqrt{52}$ וכיוונו 56.3 מעלות.

א. הצג את הוקטור בצורת קרטזית.

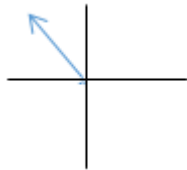
ב. מהו וקטור היחידה?

(4) מקרטזי לפולרי ברביע שנינתון הוקטור: $\vec{A}(3, -4)$.

- א. הצג את הוקטור בצורתו הפולרית (גודל וכיוון).
 ב. מהו וקטור היחידה?

**(5) מפולרי לקרטזי**נתון הוקטור \vec{A} בצורתו הפולרית. גודלו 5 וכיוונו 120°.

- א. הצג את הוקטור בצורתו הקרטזית.
 ב. מצא את וקטור היחידה.

**(6) מקרטזי לפולרי רביע שלישי**נתון הוקטור: $\vec{A}(-2, -4)$.

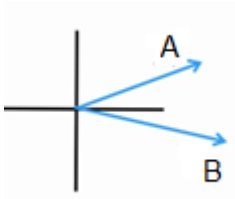
הצג את הוקטור בצורתו הפולרית.

**(7) חיבור בפולרי**

נתונים שני וקטורים:

הוקטור A שגודלו 10 וכיוונו 30° ,הוקטור B שגודלו לא ידוע וכיוונו 350° .

מהו גודלו של הוקטור B אם נתון שסכום הוקטורים ייתן וקטור ללא רכיב לציר ה-y?

**(8) חיבור וקטורים בפולרי**

נתונים שני וקטורים בהצגה פולרית:

 \vec{A} בגודל 10 ובכיוון 30° , \vec{B} בגודל 8 ובכיוון 60° .נתון: $A+B=C$.

מצא את וקטור C.

**(9) משושה של וקטורים**

מצא את הוקטור השקול לשני המצבים הבאים:

הנח כי הוקטורים יוצרים משושה שווה צלעות וגודל כל צלע הוא L.



(10) וקטור בין שתי נקודות

הוקטור \vec{A} הוא וקטור מהנקודה (x_1, y_1, z_1) אל הנקודה (x_2, y_2, z_2) .
רשום ביטוי לרכיבים של הוקטור ומצא את גודלו.

(11) חיבור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים \vec{A} ו- \vec{B} .

גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא: $\theta_A = 130^\circ$.

גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא: $\theta_B = 60^\circ$.

שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את $\vec{A} + \vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

(12) חיסור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים \vec{A} ו- \vec{B} .

גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא $\theta_A = 130^\circ$.

גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא $\theta_B = 60^\circ$.

שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את $\vec{A} - \vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

(13) מציאת אורך של שקול

אורכם של שני וקטורים הוא 5 ו-10 ס"מ.

הזווית ביניהם היא 30 מעלות.

מהו אורכו של הוקטור השקול שלהם (סכום הוקטורים)?

(14) מציאת זווית בין שני וקטורים

נתונים שני וקטורים שאורכם 10 ו-13 מטר.

אורך השקול שלהם הוא 20 מטר.

מצא את הזווית בין הוקטורים.

תשובות סופיות:

- א. (8,10) ב. (-6,-4) ג. (2,-8) (1)
- א. $|A| = \sqrt{52}$, $\alpha = 56.3$ ב. $\hat{A} = \left(\frac{4}{\sqrt{52}}, \frac{6}{\sqrt{52}} \right)$ (2)
- א. $\vec{A}(4,6)$ ב. $\hat{A} = 1$ (3)
- א. $|A| = 5$, $\alpha = 306.88$ ב. $\hat{A} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right)$ (4)
- א. $\vec{A}(-2.5, 4.33)$ ב. $\hat{A} = \left(\frac{-2.5}{5}, \frac{4.33}{5} \right)$ (5)
- א. $|A| = \sqrt{20}$, $\alpha = 243.4$ (6)
- ב. $B = 28.79$ (7)
- א. $\vec{C}(12.66, 11.92)$ (8)
- ב. $L \cdot 4 \cos(30)$ (9)
- א. $|\vec{A}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, $\vec{A} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (10)
- א. $C = 10.1$, $\theta_c = 108.1^\circ$ (11)
- א. $C = 7.62$, $\theta_c = 159.5^\circ$ (12)
- א. $|\vec{a}| = 14.6 \text{ c.m}$ (13)
- א. $\theta = 60^\circ$ (14)

מכפלה סקלרית:

רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

α - זווית בין הוקטורים.

הערות:

תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).

$$\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} : \text{נוסחה למציאת זווית בין שני וקטורים}$$

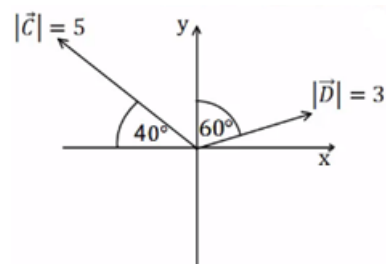
שאלות:

(1) דוגמה 1

מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית בין הוקטורים הנתונים בכל המקרים הבאים:

א. $\vec{A} = (-1, 2)$, $\vec{B} = (2, 2)$

ב.



(2) דוגמה 2

בדוק עבור זוגות הוקטורים הבאים האם הם מאונכים:

א. $\vec{A} = (1, 4)$, $\vec{B} = (-2, 5)$

ב. $\vec{A} = (1, 4)$, $\vec{B} = (8, -2)$

ג. $\vec{A} = (-1, -2)$, $\vec{B} = (-2, 1)$

ד. שרטט כל זוג וקטורים מאונכים על מערכת צירים, חשב את זוויות הוקטורים עם הצירים והראה שהזווית בין הוקטורים היא אכן 90° .

3 דוגמה 3

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-3, 1)$, $\vec{B} = (2, -4)$

- א. מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.
- ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.
- ג. מצא את המכפלה הסקלרית שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בקוסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

4 דוגמה 4

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-3, 1)$, $\vec{B} = (2, -4)$

- א. הראה כי החישוב של $\vec{A} \cdot \vec{B}$ זהה לחישוב $\vec{B} \cdot \vec{A}$.
- ב. הוכח בצורה כללית כי המכפלה הסקלרית היא פעולה קומוטטיבית. (הדרכה : רשום את הוקטורים בצורה כללית עם נעלמים).

5 דוגמה 5

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (2, 1)$, $\vec{B} = (-3, 2)$, $\vec{C} = (1, -3)$

חשב את :

א. $\vec{A} \cdot \vec{C}$

ב. $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C}$

ג. $\vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$

ד. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$

ה. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$

ו. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}$

ז. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$

6 דוגמה 6

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-2, 2)$, $\vec{B} = (1, -3)$, $\vec{C} = (1, 5)$

חשב את :

א. $\frac{(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{|\vec{B}|^2}$

ב. $\frac{(\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{C}}{|\vec{C}|^2}$

7 דוגמה 7

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-2, 2)$, $\vec{B} = (1, -3)$, $\vec{C} = (1, 5)$
מצא את הזווית בין \vec{A} ל- \vec{B} לבין \vec{B} ל- \vec{C} .

**8 מכפלה סקלרית בשתי השיטות**

נתונים שני וקטורים :

הוקטור \vec{A} שגודלו 7 וכיוונו 30.

והוקטור \vec{B} שגודלו 10 וכיוונו 70.

מצא את תוצאת המכפלה הסקלארית שלהם בעזרת שתי שיטות שונות.

9 הוכחת משפט פיתגורס המורחב

הוכח את משפט פיתגורס המורחב (במשולש שאינו ישר זווית) :

$$. C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \alpha$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \quad \text{א.} \quad \vec{C} \cdot \vec{D} = -5.13 \quad \text{ב.}$$

$$(2) \quad \vec{A} \text{ לא מאונך ל-} \vec{B}. \quad \text{ב. הוקטורים מאונכים.} \quad \text{ג. הוקטורים מאונכים.}$$



הזוויות: $\theta_A = 26.57^\circ, \theta_B = 26.57^\circ$.

הזוויות: $\theta_A = 75.96^\circ, \theta_B = 14.04^\circ$.

$$(3) \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = -10 \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad |\vec{B}| = \sqrt{20}, \theta_B = -63.43^\circ, |\vec{A}| = \sqrt{10}, \theta_A = 161.57^\circ$$

$$\text{ג.} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = -10$$

$$(4) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.}$$

$$(5) \quad \vec{A} \cdot \vec{C} = -1 \quad \text{א.} \quad (\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = -10 \quad \text{ב.} \quad \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C} = -10 \quad \text{ג.}$$

$$\text{ד.} \quad (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} = (-4, 12) \quad \text{ה.} \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) = (-18, -9) \quad \text{ו.} \quad (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B} = (12, -8)$$

$$\text{ז.} \quad (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) = 36$$

$$(6) \quad \text{א.} \quad \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{|\vec{B}|^2} = \left(\frac{-8}{10}, \frac{24}{10} \right) \quad \text{ב.} \quad \frac{(\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{C}}{|\vec{C}|^2} = (-0.54, -2.69)$$

$$(7) \quad \alpha_{\vec{BC}} = 150.26^\circ, \alpha_{\vec{AB}} = 153.43^\circ$$

$$(8) \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = 53.62 \quad \text{שיטה 1}$$

$$\text{שיטה 2:} \quad A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y = 53.58$$

$$(9) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

וקטור יחידה:

רקע:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

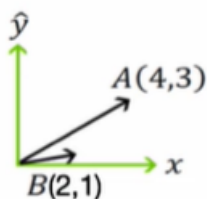
שאלות:

(1) דוגמה וקטור יחידה

מצא וקטורי יחידה בכיוון של הוקטורים הבאים:

א. $\vec{A} = (-2, -3)$

ב. $\vec{B} = (3, 4)$



(2) הטלת וקטור יחידה על וקטור יחידה

נתון הוקטור \vec{A} שבשרטוט.

א. מהו היטל הוקטור על ציר ה-x (וקטור יחידה)?

ב. מהו היטל הוקטור על ציר ה-y (וקטור יחידה)?

ג. הסבר כיצד מחשבים היטל הוקטור על הוקטור $\vec{B}(2,1)$.

ד. הסבר במילים את משמעות ההטלה של וקטור על וקטור.



(3) חישוב וקטור יחידה

נתון הוקטור: $\vec{A}(2,3,4)$.

א. מהו גודלו של הוקטור?

ב. מהו וקטור היחידה?

(4) וקטור בזמן

נתון הוקטור $\vec{A}(t)$ במישור דו מימדי כך ש- $|\vec{A}(t)| = A_0 \sin(t)$

ו- $\theta(t) = t$ כאשר $t \in [0, \pi]$ ו- A_0 קבוע.

א. מצא את הרכיבים הקרטזיים של $\vec{A}(t)$ כתלות בזמן.

ב. מצא את $\frac{d\vec{A}}{dt}$.

ג. מצא את $\frac{dA}{dt}$.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \hat{A} = (-0.55, -0.83) \text{ א.} \quad \hat{B} = (0.6, 0.8) \text{ ב.}$$

$$(2) \quad \vec{A}_x = (4, 0) \text{ א.} \quad \vec{A}_y = (0, 3) \text{ ב.} \quad \text{ג. ראה סרטון}$$

$$(3) \quad |A| = \sqrt{29} \text{ א.} \quad \hat{A} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}} \right) \text{ ב.}$$

$$(4) \quad A_x(t) = \frac{1}{2} A_0 \sin 2t, \quad A_y(t) = A_0 \sin^2 t \text{ א.} \quad A_0 (\cos 2t\hat{x} + \sin 2t\hat{y}) \text{ ב.}$$

ג. $-\sin t\hat{x} + \cos t\hat{y}$

מכפלה וקטורית בדרך מימד:

רקע:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}$$

הערות:

התוצאה של המכפלה הוקטורית היא תמיד וקטור (בניגוד לסקלרית).

נוסחה נוספת לגודל של המכפלה הוקטורית:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin \alpha$$

α - זווית הקטנה בין \vec{A} ל- \vec{B} .

שאלות:

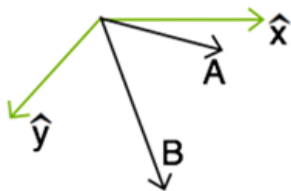
1) דוגמה-מכפלה וקטורית

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A} = (-4, 1)$, $\vec{B} = (2, -3)$

א. חשב את $\vec{A} \times \vec{B}$ באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות. מהו גודל המכפלה?

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. חשב את $|\vec{A} \times \vec{B}|$ שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בסינוס הזווית. (בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א).



2) מכפלה סקלרית ווקטורית בפולרי

נתונה מערכת צירים כבשרטוט.

נתונים שני וקטורים:

גודל 10, זווית 20° - \vec{A}

גודל 15, זווית 60° - \vec{B}

א. חשב $A \cdot B$ (מכפלה סקלרית).

ב. חשב $A \times B$ (מכפלה וקטורית).

ג. הסבר מדוע המכפלה הוקטורית נותנת את שטח המקבילית שיוצרים הווקטורים.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \vec{A} \times \vec{B} = 10\hat{z} \quad \text{וכן} \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = 10$$

$$(2) \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = 150 \cdot \cos(40) \quad \text{א.} \quad \vec{A} \times \vec{B} = -150 \cdot \sin(40) \cdot \hat{z} \quad \text{ב.} \quad \text{ג.} \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = 10$$

$$\text{ב.} \quad |\vec{A}| = \sqrt{17}, \theta_A = 165.96^\circ, |\vec{B}| = \sqrt{13}, \theta_B = -56.31^\circ$$

$$\text{ג.} \quad \text{ראה סרטון.}$$

וקטור בשלושה מימדים:

רקע:



$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

מציאת גודל הוקטור: $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

פירוק לרכיבים:

$$A_z = |\vec{A}| \cos \varphi$$

$$A_{xy} = |\vec{A}| \sin \varphi$$

$$A_x = |\vec{A}| \sin \varphi \cos \theta$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin \varphi \sin \theta$$

שאלות:

- (1) שהסכום מאונך להפרש הוכח- אם סכום של שני וקטורים מאונך להפרשם אזי אורכם שווה.
- (2) מציאת וקטור מאונך נתונים 2 וקטורים: $\vec{A}(1,4,8)$, $\vec{B}(B_x, B_y, 0)$. מצא את מרכיבי וקטור B אם נתון כי הוא ניצב לוקטור A וגודלו 10.
- (3) מציאת שקול וזווית עם הצירים שני כוחות נתונים פועלים על גוף: $\vec{A}(1,4,5)$, $\vec{B}(3,6,7)$.
- א. מהו הכוח השקול?
 ב. מהו גודלו של הכוח השקול?
 ג. מהי הזווית בין הכוח השקול ובין כל אחד מהצירים?
- (4) חישוב גודל זווית בקרטזי נתונים שני וקטורים: $\vec{A}(1,5,10)$, $\vec{B}(3,4,5)$.
- א. מהו גודלו של כל וקטור?
 ב. מהי הזווית בין שני הוקטורים?

תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) $\vec{B} = \left(-4\sqrt{\frac{100}{17}}, \sqrt{\frac{100}{17}}, 0 \right)$
- (3) א. $\vec{C} = (4, 10, 12)$ ב. $|C| = \sqrt{260}$ ג. $\alpha = 75.63$, $\beta = 51.67$, $\gamma = 41.90$
- (4) א. $|\vec{A}| = \sqrt{126}$, $|\vec{B}| = \sqrt{50}$ ב. $\alpha = 23^\circ$

מכפלה וקטורית בשלושה מימדים:

רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

דרך 1 – דטרמיננטה:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

דרך 2 – לפי גודל וכיוון בנפרד:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

כיוון לפי כלל יד ימין -



הערה:

יש כמה דרכים לבצע את הכלל, אם מחליפים אצבעות לכל שלושת הוקטורים הכלל נשאר נכון (אם מחליפים מקום רק לשני וקטורים – טעות).

דרך נוספת לכלל יד ימין נקראת כלל הבורג



מסובבים את האצבעות מ- a ל- b והתוצאה בכיוון האגודל.

שאלות:

(1) מכפלה וקטורית

נתונים הוקטורים: $\vec{A}(1,2)$, $\vec{B}(1,-3)$, $\vec{C}(-1,2,-2)$, $\vec{D}(2,0,1)$

- א. מצא את $\vec{A} \cdot \vec{B}$.
- ב. מצא את $\vec{A} \times \vec{B}$.
- ג. מצא את $\vec{C} \times \vec{D}$.

(2) מקבילון

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{a} = 2\hat{x} - 3\hat{y} + \hat{z}$, $\vec{b} = \hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$, $\vec{c} = 2\hat{x} - \hat{y}$

מרכיבים מהוקטורים \vec{a} ו- \vec{b} מקבילית ובוחרים את ראשית הצירים בקודקוד המקבילית (הנח כל היחידות בס"מ).

- א. מצאו את מיקומו של הקודקוד שמול הקודקוד שבראשית הצירים.
 - ב. מצאו את אורכי האלכסונים של המקבילית.
 - ג. מצאו את שטח המקבילית.
 - ד. יוצרים מקבילון על ידי הוספת הוקטור \vec{c} למקבילית. חשבו את גובה המקבילון המאוּנֵך למקבילית.
- רמז: השתמש ב- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $\vec{A} \cdot \vec{B} = -5$ ב. $\vec{A} \times \vec{B} = -5\hat{z}$ ג. $\vec{C} \times \vec{D} = 2\hat{x} - 3\hat{y} - 4\hat{z}$
- (2) א. $\vec{r}_1 = (3, -1, 0)$ ב. $|\vec{r}_1| = \sqrt{10}$, $|\vec{r}_2| = \sqrt{30}$ ג. $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{59}c.m^2$
- ד. $\tilde{h} = 0.13c.m$

וקטורים קולינריים:

רקע:

וקטורים מקבילים ומתקיים הקשר $\vec{B} = \alpha \vec{A}$ כאשר α סקלר כלשהו.

שאלות:

(1) וקטורים קולינאריים

עבור אילו ערכים של α ו- β הוקטורים הבאים קולינאריים (מצביעים באותו כיוון)?

$$\vec{A} = 3\hat{i} + a\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + a\hat{j} - 2\beta\hat{k}$$

(2) מציאת וקטורים מאונכים

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A}(A_x, 4)$, $\vec{B}(6, B_y)$, $\vec{C}(5, 8)$.

מצא את ערכי הוקטורים כך שהוקטור A והוקטור B יהיו מאונכים לוקטור C. האם שני הוקטורים שמצאת מקבילים?

תשובות סופיות:

$$\alpha = -\frac{9}{2}, \beta = \frac{5}{3} \quad (1)$$

$$\vec{A} = \left(-\frac{32}{5}, 4\right), \vec{B} = \left(6, -\frac{30}{8}\right) \quad (2)$$

גרדיאנט ורוטור:

רקע:

גרדיאנט בקואורדינטות השונות:

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} : \text{גרדיאנט בקואורדינטות קרטזיות}$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} : \text{גרדיאנט בקואורדינטות גליליות}$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} : (*) \text{ גרדיאנט בקואורדינטות כדוריות}$$

(*) שימו לב שהזווית φ היא עם ציר ה- z והזווית θ עם ציר ה- x .

רוטור (Rot/Curl) בקואורדינטות השונות:

בקרטזיות:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

בגליליות:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$$

בכדוריות (*):

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\theta) \right) \hat{\varphi}$$

(*) שימו לב שהזווית φ היא עם ציר ה- z והזווית θ עם ציר ה- x .

שאלות:

(1) חישוב גרדיאנט

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} : f \text{ נתונה פונקציית המיקום}$$

חשב את הגרדיאנט של הפונקציה f .

(2) חישוב השיפוע בכיוון השונה

חשב את גודל השיפוע של הפונקציה: $f(x, y) = 2x^2y$ בנקודה (1,2)

$$\hat{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) : \text{בכיוון}$$

תשובות סופיות:

$$\vec{D}f = \frac{-xz\hat{x} - yz\hat{y} + (x^2 + y^2)\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}f \cdot \hat{n} = \frac{8}{\sqrt{2}} + -\frac{2}{\sqrt{2}} \quad (2)$$