

שדות אלקטרו מגנטיים

פרק 7 - חוק גאוס

תוכן העניינים

1. הסברים בסיסיים..... 1
2. תרגול נוסף..... 4

הסברים בסיסיים:

שאלות:



- (1) **שדה של קליפה כדורית**
 נתונה קליפה כדורית בעלת רדיוס R . מצא את השדה.



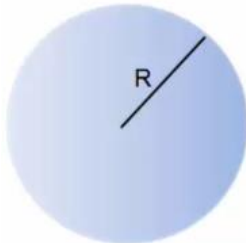
- (2) **שדה של תיל אינסופי**
 נתון תיל אינסופי בעל צפיפות λ . מצא את השדה במרחב.



- (3) **שדה של גליל אינסופי**
 נתון גליל אינסופי בעל צפיפות מטען ליחידת נפח ρ ורדיוס R . מצא את השדה במרחב.



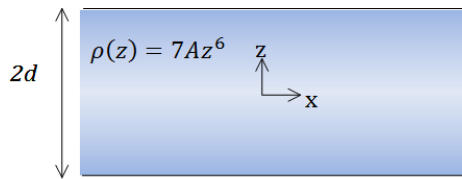
- (4) **שדה של לוח אינסופי**
 נתון משטח אינסופי בעל צפיפות מטען ליחידת שטח σ . מצא את השדה במרחב.



- (5) **שדה של כדור עם צפיפות לא אחידה**
 נתון כדור בעל רדיוס R וצפיפות התלויה במרחק ממרכז הכדור r קבוע ונתון: $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$. מצא את התפלגות השדה במרחב (בתוך ומחוץ לכדור).



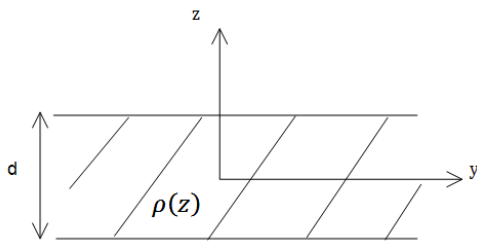
- (6) **לוח עם עובי**
 נתון מישור בעל שטח A ועובי d . המישור טעון בצפיפות מטען קבועה ליחידת נפח ρ .
 א. מצא את השדה רחוק מאוד מהמישור.
 ב. מצא את השדה קרוב מאוד למישור ובתוכו (השתמש בקירובים).
 ג. מניחים אלקטרון בגובה $Z_0 < \frac{d}{2}$, מצא את מיקום האלקטרון כפונקציה של הזמן בהנחה שצפיפות המטען במישור חיובית.



7) מישור עבה עם צפיפות משתנה

מישור אינסופי בעובי $2d$ טעון בצפיפות מטען משתנה $\rho(z) = 7Az^6$, כאשר A קבוע נתון. ציר ה- z אנך למישור וראשיתו במרכז המישור (המישור אינסופי ב- x, y , ראה ציור).

- מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.
- הראה שחוק גאוס הדיפרנציאלי מתקיים בכל המרחב.
- מצא את הרוטור של השדה החשמלי $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ בכל המרחב, והסבר את התוצאה.



8) מישור עבה עם צפיפות אנטי סימטרית

מישור אינסופי בעל עובי d טעון בצפיפות מטען כתלות במרחק ממרכז המישור $\rho(z) = Az$, קבוע נתון. מצא את השדה החשמלי בכל המרחב שיוצר המטען במישור.

תשובות סופיות:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{KQ}{r^2} \hat{r} & R < r \end{cases} \quad (1)$$

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{r} \hat{r} \quad (2)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r} \quad (3)$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & z < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{kQ_{in}}{r^2} \hat{r} & r > R \\ \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} r^2 \hat{r} & r < R \end{cases} \quad (5)$$

$$z(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{|e|\rho}{\epsilon_0 m}} t\right) \quad \text{ג.} \quad \vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \hat{z} & z > \frac{d}{2} \\ -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} \hat{z} & z < -\frac{d}{2} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \vec{E} = \frac{kpdA}{r^2} \hat{r} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\text{ג. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} A \cdot z^7 \hat{z} \quad \text{א.} \quad (7)$$

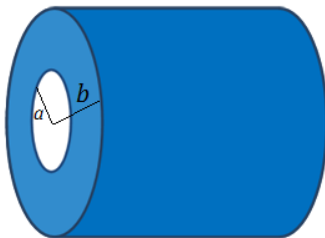
$$\vec{E} = -\frac{A}{\epsilon_0 z} \left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - z^2 \right] \hat{z} \quad (8)$$

תרגול נוסף:

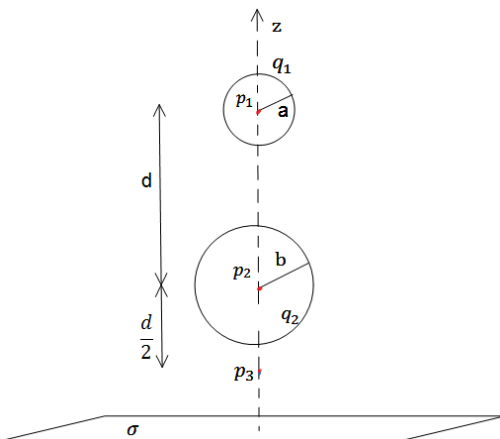
שאלות:



- (1) שתי קליפות גליליות חלולות נתונות שתי קליפות (חלולות) גליליות אינסופיות בעלות ציר סימטריה משותף. רדיוס הקליפה הפנימית הוא R_1 וצפיפות המטען המשטחית בה היא σ_1 . רדיוס הקליפה החיצונית הוא R_2 וצפיפות המטען בה היא σ_2 . מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.



- (2) קליפה גלילית עבה בעלת רדיוס פנימי a , רדיוס חיצוני b וגובה H טעונה בצפיפות מטען נפחית $\rho(r) = \frac{c}{r}$, כאשר c קבוע נתון ו- r הוא המרחק מציר הסימטריה של הקליפה. א. מצא את המטען הכולל בקליפה. ב. מצא את השדה בכל המרחב אם: $H \gg a, b$.



- (3) משטח ושתי קליפות כדוריות שתי קליפות כדוריות בעלות רדיוסים שונים $a < b$, נמצאות במרחק $d > 2b$ אחת מעל השנייה. הקליפות טעונות במטענים q_1, q_2 בהתאמה. במאונך לציר המחבר בין הקליפות ומתחת לקליפה התחתונה (עם רדיוס b) מונח מישור אינסופי הטעון בצפיפות מטען ליחידת שטח σ . מצא את השדה בנקודות הבאות.
- א. p_1 הנמצאת במרכז הקליפה בעלת רדיוס a .
 - ב. p_2 הנמצאת במרכז הקליפה בעלת רדיוס b .
 - ג. p_3 הנמצאת במרחק $\frac{d}{2}$ מתחת למרכז הקליפה התחתונה אך מעל המישור.

(4) שני מישורים בזווית



שני מישורים אינסופיים טעונים בצפיפות מטען ליחידת שטח σ . המישורים נמצאים בזווית α אחד מהשני.
 א. מצא את השדה החשמלי בין המישורים ומעל המישור האופקי.
 ב. מצא את השדה מעל שני המישורים.

(5) כדור עם חור



בתוך כדור הטעון בצפיפות מטען אחידה ρ קיים חלל כדורי בעל רדיוס a . המרחק של מרכז החלל ממרכז הכדור הוא d . מצא את השדה החשמלי בתוך החלל.

(6) שטף דרך קובייה



נתון שדה במרחב: $\vec{E} = -6x\hat{x} + (2-3y)\hat{y}$.

א. חשב את השטף העובר דרך צלעות קובייה הנמצאת ברביע הראשון כך שאחד מקדקודיה בראשית ואורך צלעה $2m$.
 ב. מהו המטען הכלוא בתוך הקובייה?

(7) מטען כלוא



נתונה פונקציית השדה החשמלי

במרחב: $\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{\epsilon_0 (r^2 + R^2)} \hat{r}$

כאשר R , ρ_0 קבועים נתונים, ו- r הוא המרחק מהראשית בקואורדינטות כדוריות, מצא את כמות המטען הכלואה בתוך מעטפת כדורית בעלת רדיוס $2R$.

(8) שטף דרך משטח ריבועי



מצא את השטף העובר דרך משטח ריבועי (לא טעון) בעל צלע באורך a הנמצא בגובה $\frac{a}{2}$ מעל מטען נקודתי q .



9) שטף דרך מעגל

מטען q נמצא בראשית הצירים.
 מהו השטף החשמלי העובר דרך עיגול ברדיוס R
 המקביל למישור $x-y$ ומרכזו נמצא
 בנקודה $\left(0,0,\frac{R}{\sqrt{8}}\right)$?



10) מישור עבה צמוד למישור דק

מישור אינסופי דק בעל צפיפות מטען אחידה σ נמצא על מישור $x-y$.
 מישור אינסופי נוסף בעל עובי d טעון בצפיפות מטען אחידה ρ , מונח מעל המישור הדק (תחתית המישור העבה נמצא גם על מישור $x-y$).
 מצא את השדה החשמלי בכל המרחב.

11) ארבעה לוחות



במערכת הבאה ישנם ארבעה לוחות הטעונים בצפיפויות מטען $\sigma_1 = 0.05 \frac{c}{m^2}$, $\sigma_2 = 0.02 \frac{c}{m^2}$.
 המרחקים בין הלוחות הם: $a = 3 \text{ c.m}$, $b = 1 \text{ c.m}$.
 כפי שמצוין בציור וניתן להניח כי מרחקים אלו קטנים בהרבה מצלעות הלוחות.

- מצא את השדה החשמלי בכל מקום במרחב (בין הלוחות ומעליהן, אין צורך להתייחס למה שקורה בצידי הלוחות).
- משחררים פרוטון ממנוחה מהלוח $-\sigma_2$. כמה אנרגיה קינטית "ירוויח" מן המערכת? (הנח שהפרוטון עובר דרך הלוחות ללא הפרעה).
- מצא את מהירות הפרוטון ביציאה מן המערכת.

12) מלוח אל לוח

שני לוחות ריבועיים נמצאים אחד מעל השני. אורך הצלע של כל לוח היא 6 ס"מ והמרחק בין הלוחות הוא 2 מ"מ . הלוחות טעונים בצפיפות מטען אחידה. המטען הכולל על הלוח התחתון הוא: $Q = 6 \cdot 10^{-6} \text{ c}$ והמטען הכולל על הלוח העליון זהה בגודלו והפוך בסימונו. משחררים אלקטרון ממנוחה קרוב מאוד ומתחת ללוח העליון: $(q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ c}, m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})$.

- כמה זמן ייקח לאלקטרון להגיע אל הלוח התחתון?
- מהי מהירותו בזמן פגיעתו בלוח?
- מהי האנרגיה הקינטית של האלקטרון ברגע הפגיעה?

תשובות סופיות:

$$\vec{E} = (\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2) \frac{1}{\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (1)$$

$$\vec{E} = \frac{C(b-a)}{\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (2)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} + 0 + \left(-\frac{kq_1}{d^2} \hat{z} \right) \quad \text{ב.} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} + \frac{kq_2 \hat{z}}{d^2} + 0 \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} - \frac{kq_2}{4} \hat{z} - \frac{kq_1}{4} \hat{z} \quad \text{ג.}$$

$$\vec{E}_T = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} ((1 + \cos \alpha) + \sin \alpha \hat{y}) \quad \text{בין המישורים:} \quad (4)$$

$$\vec{E}_T = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} ((1 + \cos \alpha) - \sin \alpha \hat{y}) \quad \text{מעל המישורים:}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{d} \quad (5)$$

$$\frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad \text{ב.} \quad -24 \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\frac{16}{5} \pi \rho_0 R^3 \quad (7)$$

$$\frac{q}{6\epsilon_0} \quad (8)$$

$$\phi = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{kqa}{2 \left(x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} dx dy \quad (9)$$

$$\frac{q}{3\epsilon_0} \quad (10)$$

$$v = 1.04 \cdot 10^8 \frac{m}{sec} \quad \text{ג.} \quad 2.53 \cdot 10^{-11} J \quad \text{ב.} \quad \vec{E} = -5.65 \cdot 10^9 \frac{N}{C} \hat{y} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$V(t) = 3.65 \cdot 10^9 \frac{m}{sec} \quad \text{ב.} \quad t \approx 1.1 \cdot 10^{-12} sec \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$E_k = 6.06 \cdot 10^{-12} J \quad \text{ג.}$$