

# מבוא למתמטיקה להנדסה 5001001

פרק 26 - חשבון דיפרנציאלי - חישובי נגזרות מיוחדות

תוכן העניינים

1. גזירה סתומה ..... 1
2. גזירה לוגריתמית ..... 3

## גזירה סתומה

### שאלות

- (1) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^2 + y^5 - 1 = 1$ .
- (2) גזור את הפונקציה הסתומה:  $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ .
- (3) גזור את הפונקציה הסתומה:  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .
- (4) מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , בנקודה  $(3, 4)$ .
- (5) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$ , דרך הנקודה  $(1, 1)$ .
- (6) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (7) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (8) מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$ , דרך הנקודה  $(0, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.
- (9) נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$ .  
 א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן  $y = 0$ .  
 ב. מצא את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שמצאת בסעיף א.
- (10) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^y - xy = 10$ .
- (11) גזור את הפונקציה הסתומה:  $x^y - y^x = 1$ .
- (12) נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ . מצא את ערך  $y^n$  בנקודה בה  $y = 1$ .

- (13)** נתון כי המשוואה  $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$ ,  
 מגדירה את  $y = y(x)$  כפונקציה סתומה של  $x$ .  
 נתון כי  $h(y)$  גזירה ברציפות ויורדת.  
 הוכיחו כי  $y(x)$  יורדת חזק.

### תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

- (9)** א.  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  ב. בראשית הצירים:  $y = -x$ , המשוואה השנייה:  $y = x - 1$ .

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

$$-1 \quad (12)$$

- (13)** שאלת הוכחה.

## גזירה לוגריתמית

### שאלות

גזור את הפונקציות הבאות:

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x} \quad (2)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y' = y \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left( (10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[ 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[ 3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$