

# אינפי ב

פרק 2 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים.....1
2. מבחני התכנסות לטורים.....3
- 3.....

## טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

### שאלות

#### טור גיאומטרי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

#### טור טלסקופי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

#### טור הרמוני מוכלל

(12) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ו.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{ד.}$$

### תכונות אלגבריות של טורים

13) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$     ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$     ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשב את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$ , אם ידוע כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

### תשובות סופיות

- |                                     |                             |                        |
|-------------------------------------|-----------------------------|------------------------|
| 1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$         | 2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$   | 3) מתבדר.              |
| 4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$         | 5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$ | 6) מתכנס ל-8.          |
| 7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$           | 8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$  | 9) מתבדר.              |
| 10) $S = \frac{1}{\ln 2}$           | 11) $\frac{1}{12}$          |                        |
| 12) א. מתכנס.<br>ד. מתבדר.          | ב. מתבדר.<br>ה. מתכנס.      | ג. מתבדר.<br>ו. מתכנס. |
| 13) א. מתכנס.                       | ב. מתבדר.                   | ג. מתבדר.              |
| 14) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$ |                             |                        |

## מבחני התכנסות לטורים

### שאלות

#### מבחן ההתבדרות

(1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\text{א. } \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \text{ב. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{ג. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2} \quad \text{ד. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$$

#### מבחן האינטגרל

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 2-5 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \\ \text{(3)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \\ \text{(4)} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p > 1) \\ \text{(5)} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p \leq 1) \end{aligned}$$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בדוק את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ .

ב. מצא את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$ .

#### מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{aligned} \text{(7)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \\ \text{(8)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \\ \text{(9)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \\ \text{(10)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \\ \text{(11)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1}-n) \\ \text{(12)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \end{aligned}$$

## מבחן המנה ומבחן השורש

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (1+n^2)}{n!} \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (19)$$

## תשובות סופיות

- |                 |               |             |             |
|-----------------|---------------|-------------|-------------|
| (1) א-ו: מתבדר. | (2) מתבדר.    | (3) מתבדר.  | (4) מתכנס.  |
| (5) מתבדר.      | (6) א. מתכנס. | (7) מתכנס.  | (8) מתבדר.  |
| (9) מתכנס.      | (10) מתכנס.   | (11) מתבדר. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר.     | (14) מתכנס.   | (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |
| (17) מתכנס.     | (18) מתכנס.   | (19) מתכנס. | (20) מתכנס. |
| (21) מתכנס.     |               |             |             |