

## חדוא 2

פרק 10 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים.....1
2. מבחני התכנסות לטורים.....3
3. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי.....5
4. תרגילי תיאוריה.....6

## טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

### שאלות

#### טור גיאומטרי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

#### טור טלסקופי

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

#### טור הרמוני מוכלל

(12) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ו.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{ד.}$$

**תכונות אלגבריות של טורים**

13) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$     ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$     ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשב את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$ , אם ידוע כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**תשובות סופיות**

- 1) מתכנס ל-  $\frac{11}{14}$     2) מתכנס ל-  $\frac{1}{3}$     3) מתבדר.
- 4) מתכנס ל-  $-\frac{64}{7}$     5) מתכנס ל-  $\frac{11}{12}$     6) מתכנס ל-8.
- 7) מתכנס ל-  $\frac{1}{2}$     8) מתכנס ל-  $\frac{1}{12}$     9) מתבדר.
- 10)  $S = \frac{1}{\ln 2}$     11)  $\frac{1}{12}$
- 12) א. מתכנס.    ב. מתבדר.    ג. מתבדר.  
 ד. מתבדר.    ה. מתכנס.    ו. מתכנס.
- 13) א. מתכנס.    ב. מתבדר.    ג. מתבדר.
- 14)  $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$

## מבחני התכנסות לטורים

### שאלות

#### מבחן ההתבדרות

(1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \text{א.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n \quad \text{ד.}$$

#### מבחן האינטגרל

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 2-5 (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (2)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p > 1) \quad (4)$$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בדוק את התכנסות הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ .

ב. מצא את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$ .

#### מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1}-n) \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \quad (10)$$

## מבחן המנה ומבחן השורש

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (1+n^2)}{n!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (19)$$

## תשובות סופיות

- |                 |               |             |             |
|-----------------|---------------|-------------|-------------|
| (1) א-ו: מתבדר. | (2) מתבדר.    | (3) מתבדר.  | (4) מתכנס.  |
| (5) מתבדר.      | (6) א. מתכנס. | (7) מתכנס.  | ב. 0        |
| (8) מתכנס.      | (9) מתבדר.    | (10) מתכנס. | (11) מתבדר. |
| (12) מתכנס.     | (13) מתבדר.   | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתכנס.     | (17) מתכנס.   | (18) מתכנס. | (19) מתכנס. |
| (20) מתכנס.     | (21) מתכנס.   |             |             |

## התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

### שאלות

#### מבחן לייבניץ

בדוק את התכנסות הטורים בשאלות 1-3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

#### התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

בשאלות 4-10 קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (8) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (10)$$

#### תשובות סופיות

- |                   |                  |                  |
|-------------------|------------------|------------------|
| (1) מתכנס.        | (2) מתכנס.       | (3) מתכנס.       |
| (4) מתבדר.        | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בתנאי. |
| (7) מתכנס בהחלט.  | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |
| (10) מתכנס בתנאי. |                  |                  |

## תרגילי תיאוריה

### שאלות

- (1) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.  
 א. אם  $\sum a_n$  מתכנס ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.  
 ב. אם  $\sum a_n$  מתבדר ו- $\sum b_n$  מתבדר, אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.

- (2) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.  
 א. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס, אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.  
 ב. אם  $\sum a_n$  חיובי ומתכנס, אז  $\sum \frac{1}{a_n}$  מתבדר.  
 ג. אם  $\sum a_n$  מתכנס, אז  $\sum a_n^2$  מתכנס.

(3) הוכח: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$  מתבדר.

(4) הוכח: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חיובי ומתכנס אז גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  מתכנס.

- (5) א. נתון טור חיובי  $\sum a_n$ . הוכח כי  $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  מתבדר.  
 ב. נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ . הוכח ש- $\sum |a_n|$  מתבדר אם  $\sum a_n^2$  מתבדר.

(6) תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית השואפת לאינסוף. הוכח כי  $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$  מתכנס.

(7)  $\sum a_n$  הוא טור אי-שלילי ומתכנס. הוכח כי  $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$  מתכנס.

(8) הוכח או הפרך :

אם הסדרה  $(a_n)_{n \geq 1}$  מקיימת  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$  אז  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  מתכנס.

(9) נניח כי  $a_n \geq 0$ .

הוכח כי:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  מתכנס.

(10) הוכח או הפרך :

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס והסדרה  $b_n$  חסומה אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס.

(11) הוכח: אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי אז  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$  מתבדר.

(12) הוכח או הפרך :

אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בתנאי ואם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתכנס בתנאי.

(13) נתון טור חיובי  $\sum a_n$ .

הוכח או הפרך :

א. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  לכל  $n$ , אז הטור מתבדר.

(14) נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .

הוכח כי  $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$  מתכנס.

- 15** נתונים שני טורים חיוביים  $\sum a_n, \sum b_n$ .
- א. נתון שהטורים  $\sum a_n^2, \sum b_n^2$  מתכנסים.
1. הוכח כי  $\sum a_n b_n$  מתכנס.
  2. הוכח כי  $\sum (a_n + b_n)^2$  מתכנס.
- ב. נתון טור חיובי ומתכנס  $\sum a_n$ .
- הוכח כי  $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התאוריה תוכלו למצוא באתר: [GooL.co.il](http://GooL.co.il)