

מכניקה 20215

פרק 19 - יחסות פרטית -

תוכן העניינים

1. דינמיקה יחסותית.....1
2. טרנספורמציות לורנץ למיקום והזמן.....4
3. טרנספורמציות לורנץ למהירות.....6
4. תרגילים לטרנספורמציות מיקום ומהירות.....7
5. תרגילים לדינמיקה יחסותית.....10
6. תרגילים נוספים.....12

דינמיקה יחסותית:

שאלות:

(1) הגעת נויטרון ממרחקים

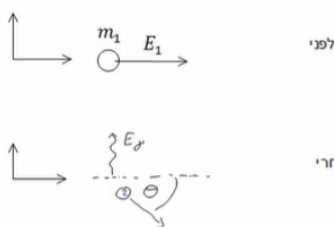
מצא את האנרגיה הדרושה לנויטרון להגיע לכדור הארץ ממרחק של 5 שנות אור בהינתן שזמן החיים של נויטרון הוא 881 שניות והמסה שלו היא: $M_n = 940 \text{ MeV} \frac{V}{c^2}$.

(2) התנגשות בסיסית

חלקיק בעל מסה m מתנגש בחלקיק בעל מסה $3m$.
לחלקיק הראשון אנרגיה כוללת לפני ההתנגשות $5mc^2$ ונתון כי התנע הכולל שלהם במערכת המעבדה הוא אפס. כתוצאה מההתנגשות שני החלקיקים מושמדים ונוצר חלקיק חדש הנמצא במנוחה.
א. מצאו את האנרגיה הקינטית של החלקיק הראשון.
ב. מצאו את פקטור לורנץ של החלקיקים לפני ההתנגשות ואת האנרגיה הקינטית של החלקיק השני.
ג. מצאו את מסת החלקיק הנוצר לאחר ההתנגשות.

(3) חלקיק מתפרק לפוטון וחלקיק נוסף

חלקיק בעל אנרגיה כוללת E_1 ומסת מנוחה m_1 נע במעבדה בכיוון החיובי של ציר ה- x .
ברגע מסוים מתפרק החלקיק לפוטון ולחלקיק נוסף.
אנרגיית הפוטון נתונה E_y וידוע כי הפוטון נע בציר ה- y , בכיוון החיובי.
א. מהו התנע של החלקיק הראשון לפני ההתפרקות?
ב. מהי הזווית של התנע של חלקיק 2 ביחס לציר ה- x ?
ג. מצא מערכת ייחוס חדשה S' שבה הפוטון יפלט בכיוון נגדי לכיוון תנועתו של חלקיק מס' 2.
מה מהירותה של מערכת זו ביחס למערכת המעבדה?



(4) פוטון פוגע בפרוטון ויוצר פיון

פוטון פוגע בפרוטון הנמצא במנוחה במערכת המעבדה.
נתונות מסת הפרוטון והפיון M_p, M_π .
מהי האנרגיה המינימלית הדרושה לפוטון על מנת שלאחר ההתנגשות ייווצרו פרוטון ופיון (π)?

(5) **דוגמה - חישוב תנע ואנרגיה קינטית של אלקטרון ופרוטון**
 חשבו את התנע והאנרגיה הקינטית של פרוטון ואלקטרון בעלי אנרגיה של 1 GeV במערכת המעבדה.

(6) **דוגמה - גמה וביטה של אלקטרון**
 מסת האלקטרון היא: $9.10938188 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ומהירות האור היא: 299792458 m/sec .
 מצאו בדיוק של 6 ספרות את γ ו- β של אלקטרון שהאנרגיה הקינטית שלו היא: $K = 100.000 \text{ MeV}$ במערכת המעבדה.

(7) **בטה של מיואונים מתפרקים**
 מסת מיואון היא פי 207 ממסת האלקטרון.
 זמן מחצית החיים הממוצע של מיואון הוא $2.20 \mu\text{s}$.
 מיואונים נעים ביחס למעבדה בניסוי כלשהו.
 זמן החיים הנמדד של המיואונים ביחס למערכת המעבדה הוא: $6.90 \mu\text{s}$.
 מהם β , התנע והאנרגיה הקינטית של המיואונים ביחידות $\frac{\text{MeV}}{c}$?

תשובות סופיות:

$$E_n = 1.69 \cdot 10^8 \text{ MeV} \quad (1)$$

$$E_{k_1=4mc^2} \quad \text{א.} \quad E_{k_2} = 3mc^2 \left(\sqrt{\frac{11}{3}} - 1 \right) \quad \text{ב.} \quad \gamma_1 = 5, \gamma_2 = \sqrt{\frac{11}{3}} \quad \text{ג.} \quad m_3 = 6.91m \quad (2)$$

$$\vec{p}_1 = \sqrt{\left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - m_1^2 c^2} \cdot \hat{x} \quad \text{א.} \quad \tan \theta = -\frac{E_\gamma}{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}} \quad \text{ב.} \quad (3)$$

$$v_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 c^2}{E_1}\right)^2} \cdot c \quad \text{ג.} \quad (4)$$

$$E_\gamma = \frac{1}{2m_p} (m_\pi^2 + 2m_\pi m_p) c^2 \quad (4)$$

$$K = 0.999 \text{ GeV}, P = 1 \frac{\text{GeV}}{c} \quad \text{אלקטרון:} \quad (5)$$

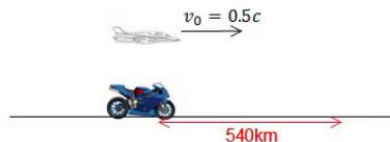
$$K = 0.062 \text{ GeV}, P = 0.347 \frac{\text{GeV}}{c} \quad \text{פרוטון:} \quad (6)$$

$$\gamma = 196.695, \beta = 0.999987 \quad (6)$$

$$\beta = 0.898, P = 314 \frac{\text{MeV}}{c}, K = 226 \text{ MeV} \quad (7)$$

טרנספרמציית לורנץ למיקום והזמן:

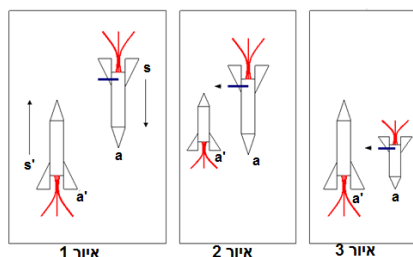
שאלות:



(1) מציאת מהירות ומיקום אופנוע

אופנוע נוסע במהירות קבועה בקו ישר. צופה על הקרקע מודד כי האופנוע נסע מרחק של 540km.

- צופה הנע במטוס ממש מהיר $v = 0.5c$, בכיוון נסיעת האופנוע, מודד כי משך זמן נסיעת האופנוע היה 0.01 שניה.
- א. מצא את מהירות האופנוע במערכת כדה"א.
- ב. מצא את המרחק שעבר האופנוע כפי שמדד הצופה במטוס.



(2) בדיקת ירי

שתי חלליות בעלות אורך מנוחה זהה, עוברות זו במקביל לזו במהירות גבוהה. בזנב החללית S מצוי תותח המכוון בניצב לכיוון תנועת החללית ולעבר מסלול התנועה של החללית s' (איור 1).

בחללית S מתבצעת בדיקת ירי בתותח ברגע שהנקודה a בראש החללית מתלכדת עם הנקודה a' (זנב s'). מכיוון שאורך החללית s' קצר מהאורך העצמי בחללית ב-S מניחים כי הטיל יפספס את החללית השנייה (איור 2). אולם במערכת s' אורך החללית S קצר מהאורך העצמי ולכן כאשר a ו- a' מתלכדות האסטרונאוט S יפגע (איור 3). ישב/י את הפרדוקס.

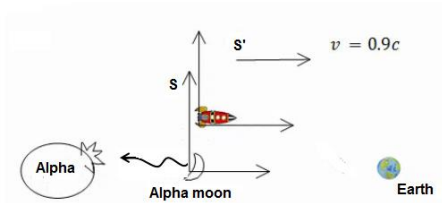
(3) מוט פולט אור לסירוגין

מוט בעל אורך l_0 נע במהירות V נתונה ביחס לכדה"א. נתון כי ב- $t = 0$ הקצה השמאלי של המוט נמצא ב- $x = x' = 0$. ברגע זה המוט פולט אור מקצהו הימני.



לאחר זמן τ המוט פולט אור מקצהו הימני. מצא את הפרש הזמנים כפי שרואה אותם צופה מכדה"א (הפרש הזמנים בין הגעת האור משני המאורעות לראשית).

(4) פיצוץ בכוכב אלפה



החללית אנטרייז יוצאת מכוכב אלפה חזרה לכדה"א. בדרך היא עוברת ליד הירח של כוכב אלפה ורואה פולס אלקטרו מגנטי חזק יוצא לכיוון הכוכב. ידוע שבירח ישנה קבוצת חייזרים תוקפניים בשם ה"קליגונים". 1.3 שניות מאוחר יותר היא רואה פיצוץ בכוכב. המרחק בין הכוכב לירח שלו הוא 500 מיליון מטרים כפי שנמדד במערכת החללית. מהירות החללית ביחס לכוכב ולירח היא $0.9c$.

- א. מהו מרווח הזמן בין גילוי הגל לפיצוץ במערכת הכוכב והירח?
- ב. מה משמעות הסימן בהפרש הזמן?
- ג. האם הפולס גרם לפיצוץ או להיפך?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } v = 5.65 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ב. } x'_2 = -10.32 \cdot 10^5 \text{ m}$$

(2) ראה סרטון.

$$(3) \quad \Delta t = \gamma_0 \left(1 + \beta \right) \left(\tau - \frac{l_0}{c} \right)$$

$$(4) \quad \text{א. } t_3 = -3.525 \text{ sec} \quad \text{ב. הפיצוץ היה לפני הגעת הגל לכוכב וגם לפני ירי הגל.}$$

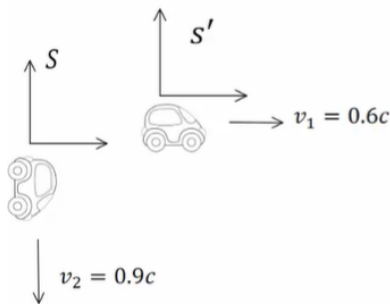
ג. לא יכול להיות שהפיצוץ גרם לירי של הפולס, $x_2 = 11.47 \cdot 10^8 \cdot \text{m} > 10.575 \cdot 10^8 \text{ m}$

טרנספורמציות לורנץ למהירות:

שאלות:

(1) מהירות יחסית בין מכוניות

שתי מכוניות נוסעות האחת במאונך לשנייה כך שמהירות המכונית הראשונה היא $0.6c$ ומהירות המכונית השנייה היא $0.9c$. מצא את המהירות היחסית.



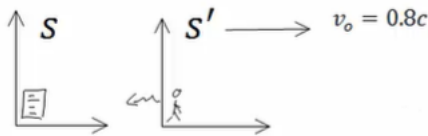
תשובות סופיות:

$$v'_{2x} = -0.6c, v'_{2y} = -0.72c \quad (1)$$

תרגילים לטרנספרמציית מיקום ומהירות:

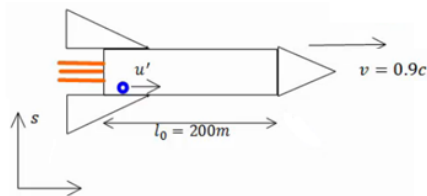
שאלות:

(1) דודה יוצאת לטיול



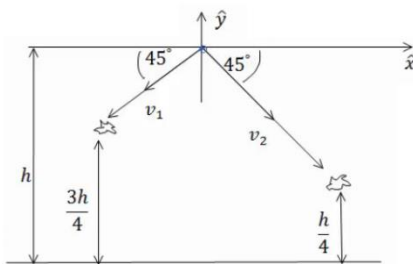
המבחן בפיזיקה התחיל בשעה 9:00 והמשגיחה יצאה לטיול במהירות $0.8c$ (דודה זריזה במיוחד). לאחר שעה לפי שעונה היא שולחת לסטודנטים אות רדיו לסיים את הבחינה. כמה זמן ארכה הבחינה עבור הסטודנטים?

(2) כדור מתגלגל בחללית



חללית בעלת אורך עצמי של 200 מטר נעה במהירות $0.9c$ ביחס למערכת אינרציאלית S . כדור קטן מתגלגל לאורכה במהירות $u' = 0.04c$ בכיוון ציר x , כפי שנמדד ע"י צופה בחללית. א. מהי מהירות הכדור כפי שנמדדת ע"י צופה ב- S ? (הבא את התשובה ביחידות של c).
ב. מהו הזמן שייקח לכדור לעבור מקצה לקצה של החללית כפי שנמדד ב- S ? (הבא את התשובה במיליוניות שנייה).
ג. איזה מרחק עבר הכדור לפי צופה במערכת S ? (ביחידות של ק"מ).

(3) חלקיקים נוצרים בגובה ומתפרקים



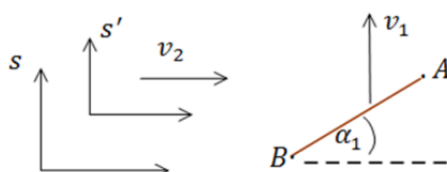
שני חלקיקים נוצרים בגובה h מעל הקרקע. אחד נפלט בזווית 225 מעלות עם ציר ה- x והשני בזווית 45- מעלות עם ציר ה- x . החלקיק הראשון מתפרק לאחר זמן T בגובה $\frac{3h}{4}$ והחלקיק השני מתפרק לאחר זמן T_2 בגובה $\frac{h}{4}$. התעלם מהכבידה בבעיה.

- הבע את מהירויות החלקיקים באמצעות h ו- T .
- מצא את זמן החיים העצמי של כל חלקיק (זמן החיים במערכת המנוחה).
- מצא מערכת S' הנעה בכיוון החיובי של ציר ה- x בה ההתפרקות מתרחשות באותו הזמן.
- מה המרחק בין ההתפרקות במערכת S' ?

(4) מיואון מתפרק ליד אלקטרון

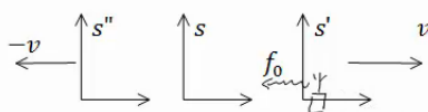
- מיואון (μ) נוצר ברגע מסוים ונע במהירות $0.7c$ ביחס לקרקע. המיואון מתפרק לאחר שנע 3 ק"מ ממקום היווצרו.
- א. כמה זמן חי המיואון במערכת העצמית שלו? אלקטרון נע במקביל למיואון ובמהירות $0.5c$ ביחס למעבדה.
- ב. מהי מהירות המיואון ביחס לאלקטרון?
- ג. איזה מרחק נע המיואון ביחס לאלקטרון.

(5) זווית של מוט נע



- מוט בעל אורך l (לא נתון) נע במהירות v_1 בכיוון ציר ה- y ביחס לצופה הנמצא במעבדה. הצופה במעבדה מודד זווית α_1 של המוט ביחס לציר ה- x .
- איזו זווית ימדוד צופה הנע במהירות $\hat{x} v_2$ ביחס למעבדה?

(6) תדר יחסי



- במערכת s' הנעה במהירות v ביחס למערכת המעבדה S , נמצא משדר רדיו הפולט אותות בתדירות f_0 ?

- א. מה תהיה התדירות שתיקלט במעבדה?
- ב. מה תהיה התדירות שתיקלט במערכת s'' הנעה במהירות $\vec{v} = -v\hat{x}$ ביחס למעבדה?

תשובות סופיות:

$$\Delta t = 1.08 \cdot 10^4 \text{ sec} \quad (1)$$

$$x_1 = 10.78 \text{ km} \quad \text{ג.} \quad t_1 = 39.62 \mu\text{s} \quad \text{ב.} \quad v_x = 0.907c \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\tau_1 = T \sqrt{1 - \frac{h^2}{8T^2 c^2}}, \quad \tau_2 = 2T \sqrt{1 - \frac{9h^2}{64T^2 c^2}} \quad \text{ב.} \quad v_1 = \frac{h}{2\sqrt{2}T}, \quad v_2 = \frac{3h}{4\sqrt{2}T} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$d'^2 = \frac{\frac{5h^4}{4} - 3c^2 T^2 h^2 + c^4 T^4}{h^2 - c^2 T^2} \quad \text{ד.} \quad v_0 = \frac{c^2 T}{h} \quad \text{ג.}$$

$$\Delta x_{12} = 0.98 \text{ km} \quad \text{ג.} \quad V_{12} = 0.31c \quad \text{ב.} \quad \tau = 10^{-5} \text{ sec} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\tan \alpha' = \gamma_2 \left(\tan \alpha_1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right) \quad (5)$$

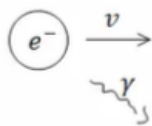
$$f'' = \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2} f_0 \quad \text{ב.} \quad f_s = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} f_0 \quad \text{א.} \quad (6)$$

תרגילים לדינמיקה יחסותית:

שאלות:

(1) חלקיק מתפרק לשני חלקיקים

חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה מתפרק לשני חלקיקים בעלי מסות מנוחה m_1, m_2 .
מה יהיו האנרגיה והתנע של החלקיקים שנוצרו? (כל המסות נתונות).



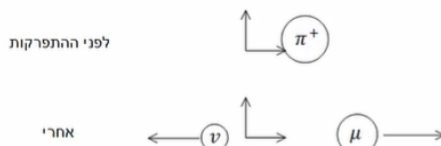
(2) אלקטרון חופשי פולט פוטון

הראו כי אלקטרון חופשי הנע בואקום אינו יכול לפלוט פוטון בודד.

(3) התנגשות חלקיקים זהים ויצירת חלקיקים

חלקיק בעל מסת מנוחה m פוגע בחלקיק זהה לו הנמצא במנוחה. כתוצאה מההתנגשות נוצרים שני חלקיקים בעלי מסות מנוחה m_1, m_2 . מצא את אנרגיית הסף ליצירת ריאקציה זו. (הנח ש: $(m_1 + m_2) > 2m$).

(4) פיון מתפרק



פיון (π^+) מתפרק למיואון חיובי ($M_\mu = 160 \text{ MeV}/c^2$) וניטרינו חסר מסה.

מצא את מסת המנוחה של הפיון אם למיואון אנרגיה קינטית של 5 MeV .

(5) פוטון מתנגש אלסטית באלקטרון



אלקטרון נע במהירות v ומתנגש בפוטון בעל אנרגיה E_γ הנע לקראתו. מצא את הערך של v אם ידוע כי הפוטון מוחזר באותה אנרגיה בה פגע. הנח כי מסת האלקטרון ידועה.

תשובות סופיות:

$$, E_1 = m_1 c^2 \gamma_1 = \frac{c^2}{2m} (m^2 + m_1^2 - m_2^2), p_1 = c \sqrt{\frac{1}{2m} (m^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 1} \quad (1)$$

$$E_2 = m_2 c^2 \gamma_2 = \frac{c^2}{2m} (m^2 + m_2^2 - m_1^2), p_2 = m_2 c \sqrt{\gamma_2^2 - 1} = c \sqrt{\frac{1}{2m} (m^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 - 1}$$

שאלת הוכחה. (2)

$$E_{\min} = \frac{1}{2m} c^2 \left((m_1 + m_2)^2 - 2m^2 \right) \quad (3)$$

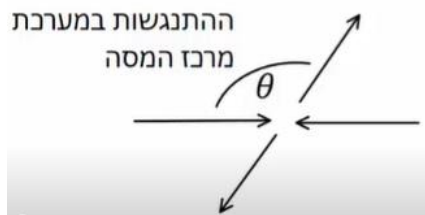
$$M_\pi = 144 \frac{\text{MeV}}{c^2} \quad (4)$$

$$v=c \left| 1 - \left(\left(\frac{E_\gamma}{m_e c^2} \right)^2 + 1 \right)^{-1} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

תרגילים נוספים:

שאלות:

(1) פוטון מתנגש ומעבר למרכז מסה



פוטון עם אנרגיה E_0 מתנגש אלסטית עם חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה (במערכת המעבדה).

א. מצא את מהירות מערכת מרכז המסה של המערכת פוטון פלוס חלקיק.

ב. מצא את התנע והאנרגיה של החלקיק והפוטון לפני ההתנגשות במערכת מרכז המסה.

מצא את התנע והאנרגיה של הפוטון והחלקיק אחרי ההתנגשות אם ידוע שהפוטון מפוזר בזווית θ ביחס לכיוון בפגיעה במערכת מרכז המסה (ראה איור).

ג. מהם האנרגיה והערך המוחלט של התנע של הפוטון והחלקיק לאחר ההתנגשות במערכת המעבדה?

ד. מצא את הזווית θ עבורה האנרגיה של הפוטון במערכת המעבדה תהיה מינימלית.

(2) שאלה 1

נתונים שני גופים הנעים בניצב זה לזה. ידוע כי מסת הגופים זהה ושווה ל- M ,

וכן כי התנעים של הגופים הם: p_1, p_2 .

ברגע מסוים, הגופים מתנגשים ומופיעים ארבעה גופים חדשים.

מסות הגופים החדשים שנוצרו הן: $m, 2m, 3m, 4m$.

מהו m המקסימלי האפשרי?

נתון: $p_1 = 6Mc, p_2 = 17Mc$.

(3) שאלה 2

נתונים שני חלקיקים בעלי מסה m , וכן נתונות האנרגיות שלהם E_1, E_2 .

החלקיקים נעים זה אל עבר זה, ומתנגשים.

חשבו את מסת החלקיק M הנוצר כתוצאה מהתנגשות החלקיקים.

נתון: $E_1 = 4mc^2, E_2 = 7mc^2$.

(4) שאלה 3

שתי חלליות יוצאות מאותה נקודה, בכיוון ניצב אחת לשנייה. חללית א' טסה במהירות v_1 , וחללית ב' טסה במהירות v_2 . חשבו את וקטור המהירות של חללית ב' ביחס לחללית א'. נתון: $v_1 = 0.8c(+\hat{x})$, $v_2 = 0.9c(-\hat{y})$

(5) שאלה 4

חלקיקים 1,2 נוצרים במעבדה ונמצאים במנוחה. ידוע לגבי זמני החיים שלהם כי: $t_2 = 0.75t_1$ (במצב מנוחה חלקיק 2 נעלם לפני חלקיק 1). מהי המהירות אליה יש להאיץ את חלקיק 2, כדי שלא ידעך לפני חלקיק 1?

(6) זריקה אופקית יחסותית

מסלולו של חלקיק במערכת S נתון ע"י: $x = vt$, $y = \frac{1}{2}at^2$, כאשר v, a קבועים ידועים. מצא את תאוצת החלקיק במערכת S' הנעה במהירות v בכיוון ציר ה-x ביחס ל-S. תאר את צורת המסלול בשתי המערכות (v אינה זניחה ביחס למהירות האור).

תשובות סופיות:

$$v_{c.m} = \frac{E_0 \cdot c}{mc^2 + E_0} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\text{ב. פוטון לפני ההתנגשות: } E'_{pH} = E_0 \sqrt{\frac{mc^2}{2E_0 + mc^2}}, P'_{pH} = \frac{E_0}{c} \sqrt{\frac{mc^2}{2E_0 + mc^2}}$$

$$\text{חלקיק לפני ההתנגשות: } E'_m = mc^2 \left(\frac{mc^2 + E_0}{\sqrt{m^2 c^4 + 2E_0 mc^2}} \right), P'_{m_x} = \frac{-mE_0 c}{\sqrt{m^2 c^4 + 2E_0 mc^2}}$$

פוטון אחרי ההתנגשות: אותו דבר כמו לפני ההתנגשות.

חלקיק אחרי ההתנגשות: אותו דבר כמו לפני ההתנגשות.

$$\text{כיוון התנע: } \vec{P}_{pH} = (P(-\cos \theta), P \sin(\theta), 0), \vec{P}_m = -\vec{P}_{pH} = (P \cos \theta, P \sin \theta, 0)$$

$$\text{ג. } E'_m = mc^2 \left(\frac{mc^2 + E_0}{\sqrt{m^2 c^4 + 2E_0 mc^2}} \right), |P_m| = \sqrt{\left(\frac{E_m}{c} \right)^2 - m^2 c^2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ד.}$$

$$m_{\max} \approx 1.45M \quad (2)$$

$$M \approx \sqrt{112}m \quad (3)$$

$$\vec{v} = (-0.8c, -0.54c, 0) \quad (4)$$

$$v \approx 0.66c \quad (5)$$

$$x' = 0, y' = \frac{1}{2} a \gamma_0^2 t'^2 \quad (6)$$