

# הסתברות

פרק 1 - יסודות ההסתברות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## הגדרות יסודיות:

### רקע:

**ניסוי מקרי:** תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

**מרחב מדגם:** כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , או: מזג האוויר בעוד שבועיים:  $\{\text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן}\}$ . חלקית, אביך.

**מאורע:** תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות:  $A, B, C$ . בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן:  $A = \{5, 6\}$ . המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן:  $B = \{2, 4, 6\}$ .

**גודל מרחב המדגם:** מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל:  $|\Omega| = 6$ .

**גודל המאורע:** מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו:  $|A| = 2, |B| = 3$ .

**מאורע משלים:** מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה:  $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$ .

**מרחב מדגם אחיד (סימטרי):** מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

**הסתברות במרחב מדגם אחיד:** במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה:  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5?  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית?  $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

**הסתברות במרחב לא אחיד:** תחושב לפי השכיחות היחסית:  $\frac{f}{n}$ .

**דוגמה:**

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון $x$	מספר התלמידים – השכיחות $f$
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8?  $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?  $\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$

**הסתברות למאורע משלים:** הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ . למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל:

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$$

**שאלות:**

- (1) מהאותיות E, F ו-G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.  
 א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.  
 ב. רשמו את המקרים למאורע:  
 i. במילה נמצאת האות E.  
 ii. במילה האותיות שונות.  
 ג. רשמו את המקרים למאורע  $\bar{A}$ .

- (2) מטילים זוג קוביות.  
 א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?  
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:  
 i. סכום התוצאות 7.  
 ii. מכפלת התוצאות 12.  
 ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

- (3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.  
 א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?  
 ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?  
 ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

- (4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

10	22	18	28	22	<b>מספר משפחות</b>
4	3	2	1	0	<b>מספר מקלטים</b>

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.  
 א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?  
 ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?  
 ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

- (5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

10	30	100	40	20	<b>מספר משפחות</b>
4	3	2	1	0	<b>מספר מכוניות</b>

- נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.  
 א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?  
 ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?  
 ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

- 6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.
- א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?
- ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:
- i. התקבל פעם אחת עץ.
- ii. התקבל לפחות פלי אחד.
- ג. מהו המאורע המשלים ל-D?
- ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

**תשובות סופיות:**

1) א.  $\Omega = \{EE, EF, EG, FE, FF, FG, GE, GF, GG\}$

ב.  $A = \{EE, EF, EG, FE, GE\}$ ,  $B = \{EF, EG, FE, FG, GE, GF\}$

ג.  $\bar{A} = \{FF, FG, GF, GG\}$

2) א.  $\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{matrix} \right\}$

ב.  $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ ,  $C = \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}$

ג. הסיכוי ל-A:  $\frac{1}{6}$ . הסיכוי ל-B:  $\frac{1}{9}$ .

3) א. 0.4 ב. 0.4 ג. 0.5

4) א. 0.22 ב. 0.78 ג. 0.32

5) א. 0.1 ב. 0.2 ג. 0.8

6) א.  $\Omega = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP, EEE\}$

ב.  $A = \{PPE, PEP, EPP\}$ ,  $D = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP\}$

ג.  $\bar{D} = \{EEE\}$

ד.  $\frac{1}{8}$