

# מכניקה קלאסית

פרק 20 - כבידה וכוח מרכזי

תוכן העניינים

1. תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד ..... 1
2. חוקי קפלר ..... 4
3. בעיית שני הגופים ומסה מצומצמת ..... (ללא ספר)
4. תרגילים נוספים ..... 5

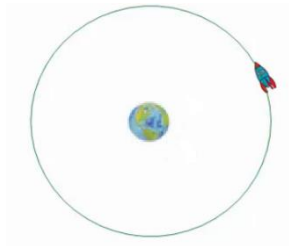
## תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד:

### שאלות:



#### (1) טיל יוצא מכדה"א וחוזר

- טיל נורה מכדור הארץ.  
הטיל מתרחק מכדור הארץ וחוזר אליו בחזרה.  
נתון שבאיזושהי נקודה במסלול המרחק של הטיל מכדה"א הוא  $R_1$ .  
נתונה הזווית בין  $R_1$  למהירות באותו הרגע  $v_1$  היא 30 מעלות.  
רדיוס כדה"א הוא  $R_E$  וזווית הפגיעה של הטיל בכדה"א היא  $\theta$ .  
א. מצא את:  $v_0, v_1, v_2, \theta_0$ . מהירות פגיעת הטיל בכדה"א.  
ב. חשב את:  $R_{\max}$  (המרחק המקסימלי של הטיל מכדה"א).  
ג.  $v_{\min}$  (המהירות באותה נקודה).



#### (2) חלק עף במהירות מילוט

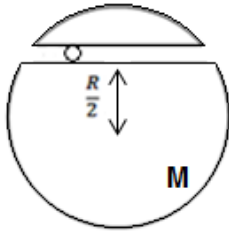
- חללית בעלת מסה  $m$  סובבת את כדה"א במסלול מעגלי ברדיוס  $R$ .  
ברגע מסוים החללית מתפצלת לשני חלקים.  
אחד החלקים בעל מסה של שליש  $m$  עף בכיוון הרדיאלי במהירות המילוט.  
מצא את הרדיוס המינימלי והמקסימלי של החלק השני.

#### (3) פוטנציאל אפקטיבי

- גוף בעל מסה  $m$  נע בתנועה מעגלית תחת השפעת הפוטנציאל:  $U(r) = -\frac{A}{\sqrt{r}}$   
כאשר  $A$  קבוע נתון. נתון גם התנע הזוויתי של הגוף  $L$ .  
א. מצא את רדיוס המעגל.  
ב. מצא את מהירות הגוף.

#### (4) זמן מחזור

- גוף בעל מסה  $m$  נע בקו ישר (מימד אחד) תחת הפוטנציאל:  $U(x) = B|x|$ .  
נתון כי המרחק המקסימלי אליו מגיע הגוף הוא  $A$ .  
א. מצא את ערך האנרגיה הכללית של הגוף.  
ב. מצא את זמן המחזור.

**(5) גוף זז במנהרה במרחק מהמרכז**

גוף נע במנהרה הנמצאת במרחק  $\frac{R}{2}$  ממרכז כדור בעל מסה  $M$ .  
הגוף מתחיל ממנוחה בקצה המנהרה ואין חיכוך.  
מצא את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

**(6) מדידת מסה של חור שחור**

חור שחור הינו גוף שמימי כבד מאוד.  
כדי למדוד את המסה  $M$  של חור שחור הנמצא במרחק גדול מאוד  $R$  מאתנו ובמנוחה ביחס אלינו, יורים לעברו טיל בעל מסה  $m$  הקטנה מאוד ביחס למסת החור.  
המהירות ההתחלתית של הטיל היא  $v_0$  והיא מוסטת בזווית  $\delta$  קטנה מאוד לכיוון המדויק אל החור.  
מכשור שנמצא על הטיל יכול להורות לנו מה הזווית  $\phi$  אליו הוסט הטיל לאחר זמן רב ביחס לזווית ממנה התחיל.  
ניתן להניח כי האנרגיה הפוטנציאלית במרחק  $R$  זניחה.  
א. מהי האקסצנטריות של מסלול הטיל סביב החור השחור? מהו סוג המסלול? (מעגל, אליפסה או היפרבולה).  
ב. מהי הזווית של מהירות הטיל לאחר שהתרחק מאוד מהחור ביחס לציר ה- $x$ ?  
ג. מצא קשר בין הזווית של סעיף ב' ל- $\phi$  ובטא את מסת החור באמצעות:  $\phi, \delta, v_0, R, m$ .

**תשובות סופיות:**

(1) ראה סרטון.

(2) ראה סרטון.

$$(3) \quad r_0 = \left( \frac{2L^2}{mA} \right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad v = \frac{L}{m \left( \frac{2L^2}{mA} \right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\text{ב.} \quad T = 8A \sqrt{\frac{2B}{m}}$$

$$(4) \quad E(x_{\max}) = 0 + B \cdot A \quad \text{א.}$$

$$(5) \quad x(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \left( \sqrt{\frac{GM}{R^3}} t \right)$$

$$(6) \quad \text{א. היפרבולה,} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \left( \frac{v_0^2 R \sin \delta}{GM} \right)^2} \quad \text{ב.} \quad \cos \theta = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{ג.} \quad M = \frac{1}{G} v_0^2 R \sin \delta \tan \frac{\varphi}{2}$$

## חוקי קפלר:

### שאלות:

#### (1) מציאת זמן מחזור

גוף נע סביב השמש במסלול אליפטי כך שמהירותו המקסימאלית ומרחקו המינימלי מהשמש נתונים. נתון גם שטח האליפסה שעושה הגוף. מצא את זמן המחזור של הגוף.



### תשובות סופיות:

$$T = \left( \frac{r_{\min} v_{\max}}{2S} \right)^{-1} \quad (1)$$

## תרגילים נוספים:

### שאלות:



#### 1) לוויין נכנס למסלול אליפטי

- לוויין נורה אנכית מפני כדה"א.  
 הלוויין מגיע לשיא גובה של  $2R_E$ .  
 ברגע זה ניתנת לו מהירות בכיוון  $60^\circ$  מעלות עם האנך  
 לכדור הארץ שגודלה  $u$ .  
 (התעלם מסיבוב ותנועת כדור הארץ).  
 א. מצא תנאי על המהירות  $u$  כך שהלוויין ישאר במסלול סגור.  
 ב. מצא תנאי נוסף על  $u$  כך שהלוויין לא יפגע בכדור הארץ.

#### 2) יקום דו מימדי

ביקום דו מימדי פועל כוח שמרכזו בנקודה  $(x_0, y_0)$

וגודלו:  $\frac{k}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^{\frac{3}{4}}}$ . כיוון הכוח הוא תמיד לכיוון מרכזו.

א. האם הכוח הוא כוח משמר? אם כן, מצא את האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח.

חשב את העבודה שמבצע הכוח על מסה  $M$  אשר נעה בין הנקודה  $(x_1, y_1)$  לבין הנקודה  $(x_2, y_2)$ .

ב. מסה  $M$  נמצאת במיקום  $(Bx_0, By_0)$  ויש לה מהירות:  $\vec{v} = A(\hat{x} + \hat{y})$ .  
 מה תהיה מהירות המסה כשהמרחק בינה לבין מרכז הכוח יהיה  $d$ ?  
 ( $A, B, d$  גדולים מאפס).

ג. מסה  $M$  נמצאת במרחק  $r_1$  ממרכז הכוח.  
 למסה מהירות  $v_1$  וידוע שהמסה נמצאת בשיווי משקל בכל זמן.  
 מצא קשר בין  $v_1$  לבין  $r_1$ .

ד. פצצה בעלת מסה  $M$  מסתובבת סביב מרכז הכוח וברגע שגודל המהירות שלה הוא  $v_2$  והמרחק שלה הוא  $r_2$ , כיוון המהירות מאונך לכיוון המיקום שלה ביחס למרכז הכוח. באותו הרגע הפצצה מתפוצצת לשני חלקים אחד בגודל  $m$  והשני בגודל  $M-m$ .  
 החלק  $M-m$  ממשיך באותו כיוון מהירות כמו לפני הפיצוץ.  
 מה צריכה להיות מהירות החלק  $m$  על מנת שהחלק  $M-m$  יהיה במרחק קבוע ממרכז הכוח לאחר הפיצוץ והלאה?

**(3) פיתוח משוואת האליפסה**

באליפסה סכום המרחקים של כל נקודה משני המוקדים של האליפסה הוא קבוע ושווה ל-  $2a$  (רוחב האליפסה). נתונה אליפסה שהמוקדים שלה נמצאים בנקודות  $(0,0)$  ו-  $(-2c,0)$ .

הראו כי משוואת האליפסה היא:  $r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  כאשר  $\varepsilon = \frac{c}{a}$

$$r_0 = \frac{(a^2 - c^2)}{a}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } |u| < \sqrt{\frac{GM}{R_E}} \quad \text{ב. } \sqrt{\frac{GM}{2R_E}} < |u| < \sqrt{\frac{GM}{R_E}}$$

$$(2) \quad \text{א. משמר, } U(r') = -2kr'^{-\frac{1}{2}}, \text{ כאשר } r' = \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$W = 2k \left[ \left((x_2-x_0)^2 + (y_2-y_0)^2\right)^{-\frac{1}{4}} - \left((x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2\right)^{-\frac{1}{4}} \right]$$

$$\text{ג. } v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} r_1^{-\frac{1}{4}} \quad \text{ב. } v = \left( 2A^2 - \frac{4k}{m} \left[ d^{-\frac{1}{2}} - (B-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_0^2 + y_0^2)^{-\frac{1}{4}} \right] \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ד. אחורה } u_2 = \frac{1}{m}(M-m) \sqrt{\frac{k}{m}} r_1^{-\frac{1}{4}} - \frac{M}{m} v_1$$

(3) הוכחה.