חשבון אינפיניטסימלי

פרק 5 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

1) נתון: $z=\ln(x^2-y^2)$, $x=2u-v,\ \ y=u^2+v^2$.
חשב: $z_u\ ,\ z_v$.

2) נתון: $z=e^{u-v}$, $v=4t+k\, ,\ u=t^2+4m$.
חשב: $z_t,\ z_m,\ z_k$.

3) נתון: $z=f(x^2-y^2)$.
הוכח: $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

4) נתון: $z=f(xy)$.
הוכח: $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

5) נתון: $z=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
הוכח: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

6) נתון: $z=f(x-y,y-x)$.
הוכח: $z_x+z_y=0$.

7) נתון: $w=f(x-y,y-z,z-x)$.
הוכח: $w_x+w_y+w_z=0$.

8) נתון: $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$.
הוכח: $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.

9) נתון: $z=y\cdot f(x^2-y^2)$.
הוכח: $\frac{1}{x}z_x+\frac{1}{y}z_y=\frac{z}{y^2}$.

10) נתון: $z=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$.
הוכח: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=xy+z$.

11) נתון: $u(x,y,z)=x^2\cdot f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$.
הוכח: $xu_x+yu_y+zu_z=2u$.

12) נתון: $h(x,y)=f(y+ax)+g(y-ax)$.
הוכח: $h_{xx}=a^2\cdot h_{yy}$.

13) נתון: $u(x,y)=f(e^x\sin y)-g(e^x\sin y)$. הוכח:
א. $u_{xx}+u_{yy}=\frac{u_{xx}-u_x}{\sin^2 y}$
ב. $u_{xy}=u_{yx}$
ג. חשב: $u_{xy}(1,\pi)$, אם ידוע ש- $f'(0)=2,\quad g'(0)=1$.

14) נתון: $y=r\sin\theta$, $x=r\cos\theta$, $u=f(x,y)$.
א. הוכח: $(u_x)^2+(u_y)^2=(u_r)^2+\frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$.
ב. הוכח: $u_{rr}=f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta$.
ג. הוכח: $f_{xx}+f_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{1}{r}u_r$.

15) נתון $z=h(u,v)$, ונתון כי $v=g(x,y)$, $u=f(x,y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$.

הוכח כי:

א. u,v מקיימות את משוואת לפלס.

כלומר, $u_{xx}+u_{yy}=0$ וכן $v_{xx}+v_{yy}=0$.

ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)(h_{uu}+h_{vv})$

16) נתון: $u=f(x,y)$, $x=r\cosh s$, $y=r\sinh s$.

הוכח כי: $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$.

17) פונקציה $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n, אם $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$.

הוכח כי אם f הומוגנית, אז:

א. $x\cdot f_x+y\cdot f_y=n\cdot f(x,y)$

ב. $x^2f_{xx}+y^2f_{yy}+2xyf_{xy}=n(n-1)\cdot f(x,y)$

תשובות סופיות

1) $z_u = \frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x\cdot 2 + \frac{1}{x^2-y^2}(-2y)\cdot 2u$

2) $z_t = e^{u-v}(1)\cdot 2t + e^{u-v}(-1)\cdot 4, \quad z_m = e^{u-1}(1)\cdot 4, \quad z_k = e^{u-v}(-1)\cdot 1$

13) ג. $-e$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il