בשביל התירגול

מבחן סיווג במתמטיקה לפקולטה למדעים מדויקים

פרק 2 - מבוא מתמטי כללי

תוכן העניינים

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0 , \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה: $A = \{x \mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x\,|\,10<x<20,\ \text{מספר ראשוני } x\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x\,|\,x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x\,|\,x=2m,\ \text{שלם זוגי } m\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$ ב. $2\in A$ ג. $\{2\}\in A$

ד. $\{2\}\subseteq A$ ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ ו. $\phi\in A$

ז. $\phi\subseteq A$ ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ ט. $\{2,4\}\subseteq A$

י. $\{2,4\}\in A$ יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ יב. $\{2,5\}\subseteq A$

יג. $\{2,5\}\in A$ יד. $\{1,4\}\in A$

7) מצא שתי קבוצות, A ו- B, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$, $E=\{7,8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

9) הוכח: $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

10) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$.

רשום את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

11) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$, $B=(-2,1)$, $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\le x\le 4\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2^x=0\}$

רשום את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

12) נתונות 3 קבוצות:

$A=\{4,5,6,7,8\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$, $C=\{4,5,6,10\}$

א. חשב את $(A-B)-C$.

ב. חשב את $A-(B-C)$.

13) נתון: $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$, $A=\{12,15,18\}$, $B=\{13,15,17\}$.

הדגם את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

14) הוכח את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

15) מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|<2 \ \vee \ x>4\}$

16) הצג באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B$
ב. $A\cup B$
ג. A^c
ד. $A\cap B^c$
ה. $A^c\cap B$
ו. $A\cup B^c$
ז. $A^c\cup B$
ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$
ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

17) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי $A\setminus B=A\cap B^C$.
הראה זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.

ב. נסמן: $X=C\setminus(A\cap B),\ Y=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.
הוכח כי $X=Y$.

ג. נסמן: $X=A\setminus(B\cup C),\ Y=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
הוכח כי $X=Y$.

18) תהיינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.
טענה א': $X\cap Y\cap Z=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus Z)\cup(Z\setminus X)$.
טענה ב': $((X\cap Y)\cup Z)^C=(X^C\cup Y^C)\cap Z^C$.
טענה ג': $X\setminus(Y\setminus Z)=(X\setminus Y)\setminus Z$.
איזו טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z?

19) הוכח כי אם הנקודה x_1 שייכת לסביבת ε של הנקודה x_0,
אז קיימת סביבת δ של x_1 שמוכלת בסביבת ε של הנקודה x_0.

20) הוכח שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

21) הוכח כי אם x_0 לא שייכת לקטע הסגור $[a,b]$, אז קיימת סביבה של הנקודה x_0 אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע $[a,b]$.

22) הוכח כי אם $|x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon$, אז $|xy-x_0y_0|<\varepsilon(|x_0|+|y_0|+\varepsilon)$.

תשובות סופיות

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל x קיים y, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל n טבעי המספר n^3-n מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2\ ,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$ $A=\{1,2\}$

8) א. $A,\ C$ ב. $E,\ D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) שאלת הוכחה.

10) $1)\ A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$, $2)A\cap B=\{4,6,8\}$, $3)(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$

11) $1)\ A\cup B=(-2,4)$, $2)A\cap B=\phi$, $3)(A\cup B)\cap C=(0,4)$,

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$

12) א. ϕ ב. $\{4,5,6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א. $A^C=(-\infty,1)$ ב. $B^C=[1,4]$ ג. $C^C=[1,4]$

ד. $D^C=(-\infty,1]\cup[3,4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענה ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

המספרים האי-רציונליים

שאלות

(1 א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכח שהמספר זוגי.
ב. הוכח כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

(2 א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכח שהמספר מתחלק ב-3.
ב. הוכח כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

(3 א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכח שהמספר זוגי.
ב. הוכח כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

(4 הוכח כי $\sqrt{n}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- n טבעי שאינו ריבוע של מספר).

(5 הוכח או הפרך:
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.

(6 א. הוכח כי $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ב. הוכח כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ג. הוכח כי $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

(7 א. יהי p מספר ראשוני ויהיו a,k מספרים טבעיים.
הוכח כי: $p|a^k \Rightarrow p|a$.
ב. הוכח: אם $n \neq N^k$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי $(n,k,N \in \mathbb{N})$.

הערת סימון: אם מספר a מתחלק במספר b מסמנים $b|a$,
ואומרים גם "b מחלק את a".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

שאלות

1) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n-1}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

2) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{1}{n^4+2n+1}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

3) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n^4+n^2+3}{2n^4+2n^2+8}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

4) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{[cn]}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\ ,\ 0<c\in\mathbb{R}\right\}$.

א. הוכח שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצא את $\sup A$.

ב. הוכח שהקבוצה חסומה מלמטה ומצא את $\inf A$.

5) נתונה הקבוצה $A=\left\{n^5-n+4 \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה במידה והם קיימים.

6) נתונה הקבוצה $A=\left\{11-4^n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7) נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{4n-1}{5n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדוק האם הקבוצה חסומה.

ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8) מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

א. $A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

ב. $B=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid |x-1|\le 1\right\}$

ג. $C=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2-4}{(x-2)^2}\le 0\right\}$

ד. $D=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=1+\frac{n+1}{n+4}\sin\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

9) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים S.
הוכח שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.

ב. הוכח שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10) הוכח את הטענות הבאות:

א. אם α הוא הסופרמום של הקבוצה A, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\alpha-\varepsilon<x\le\alpha$.

ב. אם β הוא האינפימום של הקבוצה A, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\beta\le x<\beta+\varepsilon$.

11) הוכח את הטענות הבאות:
א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.
(משפט הצפיפות של הממשיים)
ב. עבור קטעים מהטיפוס: $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, לא קיים מקסימום.
ג. עבור קטעים מהטיפוס: $[a,\infty),(a,\infty),(-\infty,\infty)$, לא קיים מקסימום.
ד. עבור קטעים מהטיפוס: $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.
ה. אם S היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- S יש חסם עליון, ומתקיים $\max S=\sup S$.

12) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$, ויהי $x\in\mathbb{R}$.
נגדיר את המרחק בין x ל- A על ידי: $d\left(x,A\right)=\inf\left\{\left|x-a\right|\,|\,a\in A\right\}$.
אם $\alpha\in\mathbb{R}$ הוא החסם העליון של A, הראה כי $d\left(\alpha,A\right)=0$.

13) הוכח שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

14) הוכח שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.

15) ענה על הסעיפים הבאים:
א. נניח ש- K קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.
נתבונן בקבוצה $-K=\left\{-x\,|\,x\in K\right\}$.
הוכח שהקבוצה $-K$ חסומה מלמעלה.
ב. הוכח שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

16) תהי T קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
תהי S קבוצה חלקית לא ריקה של T.
הוכח כי:
א. ל- T יש חסם עליון $\sup T$.
ב. ל- S יש חסם עליון $\sup S$.
ג. $\sup S\le\sup T$.
ד. אם S ו- T בעלות מקסימום, אז $\max S\le\max T$.

17) יהיו A ו- B שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.

א. נניח כי לכל $x\in A$ קיים $y\in B$, כך ש- $x<y$.

הוכח כי $\sup A\le \sup B$.

האם יהיה נכון לומר ש- $\sup A<\sup B$?

ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל $y\in B$ קיים $x\in A$, כך ש- $y<x$.

הוכח כי $\sup A=\sup B$.

18) נניח ש- A ו- B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים, כך ש- $\sup A=\inf B$.

הוכח שלכל מספר $\delta>0$, קיים מספר x ב- A, ומספר y ב- B, כך ש- $x+\delta>y$.

19) נניח ש- A ו- B הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים, כך ש- $\sup A\le \inf B$.

נניח שלכל מספר $\delta>0$ קיים מספר x ב- A, ומספר y ב- B, כך ש- $x+\delta>y$.

הוכח כי $\sup A=\inf B$.

20) נניח ש- A קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום, ונניח כי $x<\sup A$.

הוכח שיש לפחות שני איברים בקבוצה A, שנמצאים בין x ל- $\sup A$.

21) תהי S קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.

הוכח כי אם $c\ge 0$, אז ל- $c\cdot S$ יש חסם עליון, ומתקיים $\sup(c\cdot S)=c\cdot \sup S$.

22) יהיו S ו- T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.

הוכח כי הקבוצה $S+T$ היא בעלת חסם עליון ומתקיים:

$\sup(S+T)=\sup S+\sup T$.

23) יהיו S ו- T קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.

א. הוכח כי הקבוצה $S\cup T$ היא בעלת חסם עליון.

ב. הוכח כי $\sup(S\cup T)=\max\{\sup S,\sup T\}$.

24) תהיינה U,T,S קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.

נניח כי לכל $s\in S$ ולכל $t\in T$ קיים $u\in U$, המקיים את התנאי: $u\ge s+t$.

הוכח כי $\sup U\ge \sup T+\sup S$.

25) הוכח את הטענות הבאות:

א. אם S ו-T הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, כך שכל איבר של S אינו גדול משום איבר של T, אז קיימים $\sup S, \inf T$, ומתקיים: $\sup S \le \inf T$.

ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה S מתקיים: $\inf S \le \sup S$. האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

26) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נסח והוכח את משפט ארכימדס.

ב. נסח והוכח את תכונת ארכימדס.

ג. הוכח שלכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n, כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

ד. הוכח שלכל שני מספרים ממשיים α, β המקיימים $\alpha < \beta$, קיים מספר טבעי n, כך ש-$\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$ וגם $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$.

27) תהי A תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A.
נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$, כך ש-$a_n > \alpha - \frac{1}{n}$.
הוכח כי α הוא הסופרמום של A.

28) הוכח שלכל מספר ממשי c **קיים** מספר שלם **יחיד** $m \in \mathbb{Z}$, כך ש-$m \le c < m+1$.
למספר m קוראים הערך השלם של c, ומסמנים $m = [c]$.

29) יהיו a ו-b שני מספרים ממשיים המקיימים $|a-b| < \frac{1}{n}$, לכל מספר טבעי n.
הוכח כי $a = b$.

30) ענה על הסעיפים הבאים:

א. לכל n טבעי נגדיר $I_n = [n, \infty)$.
הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

ב. לכל n טבעי נגדיר $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$.
הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \ne \phi$.

31) ענה על הסעיפים הבאים:

א. לכל n טבעי נגדיר $I_n=[a_n,b_n]$.

נניח כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל n.

הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.

ב. לכל n טבעי נגדיר $I_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$.

הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

ג. בסעיף ב' התקיים כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל n, וכן $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

32) לכל n טבעי נגדיר $I_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$.

הוכח כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

תשובות סופיות

1) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A=\inf A=0,\ \sup A=1$

2) א. הקבוצה חסומה. ב. $\max A=\sup A=\frac{1}{4},\ \inf A=0$

3) א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A=\inf A=\frac{5}{12},\ \sup A=\frac{1}{2}$

4) א. הקבוצה חסומה. ב. $\sup A=c,\ \inf A=[c]$

5) א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב. $\min A=4$

6) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.
ב. $\max A=7$

7) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי $\frac{4}{5}$, וחסומה מלמטה על ידי $\frac{3}{5}$;
לכן, הקבוצה חסומה. ב. $\sup A=\frac{4}{5}$, $\min A=\frac{3}{5}$

8) א. $\max A=\frac{5}{4},\quad \inf A=-1$ ב. $\min B=0,\ \max B=2$
ג. $\min C=-2,\quad \sup C=2$ ד. $\inf D=0,\ \sup D=2$

שאלות **9-32** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

קבוצה צפופה

שאלות

1) הוכח שקבוצת הממשיים צפופה בקבוצת הממשיים.

2) הוכח שקבוצת הרציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.

3) הוכח שקבוצת האי-רציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.

4) הוכח שהקבוצה $A=\left\{\sqrt{10}q \mid q\in\mathbb{Q}\right\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.

5) הוכח שהקבוצה $A=\left\{\sqrt{m}-\sqrt{n} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.

6) יש המגדירים קבוצה צפופה בממשיים כך:
תת-קבוצה S של $\mathbb{R}$ היא צפופה (ב- $\mathbb{R}$),
אם לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $s\in S$, כך ש- $|s-x|<\varepsilon$.
הוכח שאם S תת-קבוצה של $\mathbb{R}$ מקיימת את התכונה,
שלכל $a,b\in R$ קיים $s\in S$, כך ש- $a<s<b$, אז S צפופה ב- $\mathbb{R}$.

7) הוכח שהקבוצה $A=\left\{q\sqrt{10} \mid 0<q\in\mathbb{Q}\right\}$ צפופה ב-$[0,1]$.

8) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $(1,\infty)$.
הוכח שהקבוצה $B=\left\{\frac{a}{n} \mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה בקטע $(0,1)$.

9) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע $[0,1]$.
הוכח שהקבוצה $B=\left\{na \mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה בקטע $[0,\infty)$.

10) הוכח, שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים, שלא מופיעה בהם הספרה 4,
אינה צפופה בקטע $I=[0,1]$.

11) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $(1,\infty)$ וצפופה בו.

הוכח שהקבוצה $C=\left\{\frac{a}{n^2(a+1)} : a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה צפופה בקטע $[0,1]$.

12) תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע $[0,1]$.

הוכח שהקבוצה $C=\left\{\frac{a+1}{n^2} \mid a\in A,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ אינה צפופה בקטע $[0,1]$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

סימן הסכימה

שאלות

1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_{k+1}$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3} \left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{\ell=1}^{3} \left(\ell^2 - x_{2\ell} - 4\right)$

2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8$

ה. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+...+43\cdot 44$

ו. $3\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4+12\cdot 5+15\cdot 6+18\cdot 7+21\cdot 8$

ז. $5^2+7^2+...+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{10\cdot 11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

3) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה'):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20} \frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$ ב. $\sum_{k=1}^{11} \frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$ ג. $\sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$

* תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: $(a\neq 1)$ $\sum_{k=1}^{n} a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}$.

5) חשב את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$

ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$

ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

6) הוכח כי:

א. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}=\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k+4}}{k+2}$

ב. $\sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}=\sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}$

7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11} k^2$ ב. $\sum_{10}^{20} 4^{2k}$

תשובות סופיות

1) א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$
ב. $2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4$
ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$
ד. $4\cdot 7^2 a_7+4\cdot 8^2 a_8+4\cdot 9^2 a_9+4\cdot 10^2 a_{10}+4\cdot 11^2 a_{11}+4\cdot 7^2 a_7$
ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$
ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$
ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$
ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$
ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

2) א. $\sum_{k=0}^{7} 2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} 2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9} (2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7} k(k+1)$
ה. $\sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7} 3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$
ח. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5} \frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4} \frac{4k}{5^{k-1}}$

3) א. 220 ב. 1650 ג. 4360
ד. 4360 ה. 28 ו. 4545

4) א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$
ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^{9}-1\right)}{4-1}\right]$

5) א. 2870 ב. 4886 ג. 2024 ד. 969

6) הוכחה.

7) א. $\frac{8(8+1)(2\cdot 8+1)}{6}+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+9\cdot 8$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

אינדוקציה

שאלות

1) הוכח באינדוקציה כי $4\cdot 10^n + 14\cdot 19^n$ מתחלק ב-9 לכל n טבעי.

2) הוכח באינדוקציה כי $\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$ $\left(k,n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}\right)$.

3) מצא את ה-n הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $2^n \ge n^2$,
והוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

4) הוכח את הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה כי $(1+x)^n \ge 1+nx$, לכל n טבעי ולכל $x\ge -1$ ממשי.
הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכח כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, לכל n טבעי.
רמז: היעזר בתוצאת סעיף א'.

5) הוכח באינדוקציה כי $(1-x)^n < \dfrac{1}{1+xn}$ לכל $0<x<1,\ n\in\mathbb{N}$.

6) הוכח באינדוקציה כי $n! \le \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
רמז: היעזר במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

7) נתון כי $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$.
הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

א. $a_n \le 2$

ב. $a_n \le a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיביות.

8) הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי,
אם $a_1=-1,\ a_2=0$, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$,
אז $a_n=n^2-2n$.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיבית.

9) הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי,

אם $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$, $a_1=1,\ a_2=1$,

אז $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}(-1)^n$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיביות.

10) הוכח באינדוקציה כי 4^n-1 מתחלק ב-15, לכל n טבעי **זוגי**.

11) הוכח באינדוקציה כי $\begin{pmatrix}0&0\\0&a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}0&0\\0&a^n\end{pmatrix}$ $(n\in\mathbb{N},a\in\mathbb{R})$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

הערה: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים" בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

אי שוויונים מפורסמים

שאלות

1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שלכל שני מספרים ממשיים x,y המקיימים $x<1, y>1$, מתקיים $x+y>xy+1$.

ב. הוכח באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי:
אם $a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n=1$, אז $a_1+a_2+\ldots+a_n\geq n$ $(0<a_i\in\mathbb{R})$.

2) נסח והוכח את **אי שוויון הממוצעים**.

3) הוכח שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים:

א. $|a+b|\leq|a|+|b|$ **(אי שוויון המשולש)**

ב. $|a-b|\leq|a|+|b|$

ג. $|a-b|\geq|a|-|b|,\ \ |a-b|\geq|b|-|a|$

ד. $|a-b|\geq\left||a|-|b|\right|$

ה. $|a+b|\geq\left||a|-|b|\right|$

ו. $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$ $(a_i\in\mathbb{R})$

4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נסח והוכח את **אי שוויון קושי-שוורץ**.

ב. הוכח כי אם $a_1+..+a_n=1$ אז $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geq\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{R})$.

הערה: **אי שוויון ברנולי** מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".
נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

פתרון אי שוויונים

שאלות

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $x^2-12x>-32$

2) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

3) $2x^2+2x+24\geq 0$

4) $\dfrac{x-1}{x^2-9}>0$

5) $\dfrac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\dfrac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

7) $|x+2|<3$

8) $|6-2x|<x$

9) $|2x+3|<8<|5-x|$

10) $x^2-6|x+1|-1>0$

11) $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

12) $\sqrt{x+3}<7$

13) $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

14) $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

הערה: לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

תשובות סופיות

1) $x>8$ או $x<4$

2) $x\geq 11$ או $x\leq 7$

3) כל x

4) $x>3$ או $-3<x<1$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $1\leq x\leq 6$

7) $-5<x<-1$

8) $2<x<6$

9) $-5\frac{1}{2}<x<-3$

10) $x>7$ או $x<-5$

11) $x>4$ או $x<-1$

12) $-3\leq x<46$

13) $x<0.472$

14) אין פתרון.

עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

שאלות

1) חשב, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$

2) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{n^2-2}{(n+1)!}+\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

3) חשב:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

4) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $1=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$

ב. $\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{n}\binom{n}{k}$

ג. $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

5) הוכח באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-2}=\binom{n}{2}$$

6) רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ לכל $0\leq k\leq n$, $k,n\in\mathbb{N}$.

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

8) הוכח שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים:

א. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n$

ב. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

ג. $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+9\binom{n}{2}-...+3^n\binom{n}{n}=4^n$

9) מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a}+2a^2\right)^{10}$.

10) בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא a^7.
מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

11) מצא, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את x, וחשב את ערכו.

12) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}+\frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a=b=1$.

13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15.
מצא את n.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$

2) שאלת הוכחה.

3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) א. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

ב. $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

ג. $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) $T_4 = \frac{15}{2a}$

10) $T_7 = 924a^7$

11) $T_9 = 45$

12) א. $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$ ב. 2^{18}

13) $n = 6$

שדות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ($\oplus$) וכפל ($\otimes$) על R.
בדוק, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. $x\oplus y=x+y+4$, $x\otimes y=2xy$

ב. $x\oplus y=x+y$, $x\otimes y=2xy$

ג. $x\oplus y=y$, $x\otimes y=y^2$

2) נתונה הקבוצה $Q\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\right\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$
$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

הוכח שהקבוצה $Q\left[\sqrt{2}\right]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.

ב. הוכח שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.

ג. הוכח שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.

ד. הוכח שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

4) יהיו a,b איברים בשדה.

א. הוכח כי $a+a=a \;\Leftarrow\; a=0$.

ב. הוכח כי $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

ג. הוכח כי $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$.

5) יהיו a ו-b איברים של שדה.
הוכח כי:

א. $(-1)\cdot a=-a$

ב. $(-a)b=a(-b)=-ab$

6) הוכח שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכח כי $a=c \;\Rightarrow\; ab=cb$, לכל a,b,c, בשדה $(b\neq 0)$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il