

# חדוא 1

## פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

### תוכן העניינים

|    |   |
|----|---|
| 1  | 1. מבוא לתורת הקבוצות                     |
| 7  | 2. המספרים האי-רציונליים                  |
| 8  | 3. קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות        |
| 15 | 4. קבוצה צפופה                            |
| 17 | 5. הערך השלם                              |
| 19 | 6. סימן הסכימה                            |
| 22 | 7. אינדוקציה                              |
| 24 | 8. פתרון אי שוויונים                      |
| 26 | 9. אי שוויונים מפורסמים                   |
| 27 | 10. עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון |
| 30 | 11. שדות                                  |

## מבוא לתורת הקבוצות

### שאלות

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y : (x + y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y : (x + y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  (  $k$  ו-  $n$  טבעיים).

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

(7) מצא שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$ ,  $C = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{6, 7, 8\}$ ,  $E = \{7, 8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$ .

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$ .

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$ .

(9) הוכח:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

**(10)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(11)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^x = 0\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(12)** נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשב את  $(A - B) - C$ .

ב. חשב את  $A - (B - C)$ .

**(13)** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ ,  $A = \{12, 15, 18\}$ ,  $B = \{13, 15, 17\}$

הדגם את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(14)** הוכח את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(15)** מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**(16)** הצג באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$                    | ב. $A \cup B$                    |
| ג. $A^c$                         | ד. $A \cap B^c$                  |
| ה. $A^c \cap B$                  | ו. $A \cup B^c$                  |
| ז. $A^c \cup B$                  | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ |                                  |

**(17)** ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח כי  $A \setminus B = A \cap B^c$ .  
הראה זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן:  $X = C \setminus (A \cap B)$ ,  $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .  
הוכח כי  $X = Y$ .
- ג. נסמן:  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  
הוכח כי  $X = Y$ .

**(18)** תהיינה  $X, Y, Z$  קבוצות כלשהן.

- טענה א':  $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ .
- טענה ב':  $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$ .
- טענה ג':  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z$ .
- איזו טענה נכונה לכל בחירה של  $X, Y, Z$ ?

**(19)** הוכח כי אם הנקודה  $x_1$  שייכת לסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ , אז קיימת סביבת  $\delta$  של  $x_1$  שמוכלת בסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ .

**(20)** הוכח שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

**(21)** הוכח כי אם  $x_0$  לא שייכת לקטע הסגור  $[a, b]$ , אז קיימת סביבה של הנקודה  $x_0$  אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע  $[a, b]$ .

**(22)** הוכח כי אם  $|x - x_0| < \varepsilon$ ,  $|y - y_0| < \varepsilon$ , אז  $|xy - x_0y_0| < \varepsilon(|x_0| + |y_0| + \varepsilon)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים. ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$   $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  (1)  $A \cap B = \{4, 6, 8\}$  (2)  $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$  (3)
- (11)  $A \cup B = (-2, 4)$  (1)  $A \cap B = \emptyset$  (2)  $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$  (3)  
 $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$  (4)  $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$  (5)  
 $(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1)$  (4)  $(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1)$  (5)

12) א.  $\phi$  ב.  $\{4,5,6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א.  $A^c = (-\infty, 1)$  ב.  $B^c = [1, 4]$  ג.  $C^c = [1, 4]$

ד.  $D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענה ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

## המספרים האי-רציונליים

### שאלות

- (1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכח שהמספר זוגי.  
 ב. הוכח כי  $\sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכח שהמספר מתחלק ב-3.  
 ב. הוכח כי  $\sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכח שהמספר זוגי.  
 ב. הוכח כי  $\sqrt[3]{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (4) הוכח כי  $\sqrt{n}$  הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- $n$  טבעי שאינו ריבוע של מספר).
- (5) הוכח או הפרך:  
 א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
 ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.  
 ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
 ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.
- (6) א. הוכח כי  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
 ב. הוכח כי  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
 ג. הוכח כי  $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (7) א. יהי  $p$  מספר ראשוני ויהיו  $a, k$  מספרים טבעיים.  
 הוכח כי:  $p | a \Leftrightarrow p | a^k$ .  
 ב. הוכח: אם  $n \neq N^k$ , אז  $\sqrt[k]{n}$  הוא מספר אי-רציונלי ( $n, k, N \in \mathbb{N}$ ).
- הערת סימון: אם מספר  $a$  מתחלק במספר  $b$  מסמנים  $b | a$ ,  
 ואומרים גם "  $b$  מחלק את  $a$  ".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

### שאלות

$$(1) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(2) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{1}{n^4 + 2n + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(3) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{n^4 + n^2 + 3}{2n^4 + 2n^2 + 8} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(4) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{[cn]}{n} \mid n \in \mathbb{N}, 0 < c \in \mathbb{R} \right\}$$

- א. הוכח שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצא את  $\sup A$ .  
 ב. הוכח שהקבוצה חסומה מלמטה ומצא את  $\inf A$ .

$$(5) \text{ נתונה הקבוצה } A = \{n^5 - n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

6) נתונה הקבוצה  $A = \{11 - 4^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7) נתונה הקבוצה  $A = \left\{ \frac{4n-1}{5n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- א. בדוק האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8) מצא את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{א.}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| \leq 1\} \quad \text{ב.}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-4}{(x-2)^2} \leq 0 \right\} \quad \text{ג.}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 1 + \frac{n+1}{n+4} \sin \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{ד.}$$

9) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים  $S$ . הוכח שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.  
 ב. הוכח שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10) הוכח את הטענות הבאות:

- א. אם  $\alpha$  הוא הסופרמום של הקבוצה  $A$ , אז לכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$ , קיים איבר  $x \in A$ , כך ש- $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$ .  
 ב. אם  $\beta$  הוא האינפימום של הקבוצה  $A$ , אז לכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$ , קיים איבר  $x \in A$ , כך ש- $\beta \leq x < \beta + \varepsilon$ .

(11) הוכח את הטענות הבאות :

- א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.  
(משפט הצפיפות של הממשיים)
- ב. עבור קטעים מהטיפוס :  $(-\infty, b), [a, b), (a, b)$ , לא קיים מקסימום.
- ג. עבור קטעים מהטיפוס :  $(-\infty, \infty), (a, \infty), [a, \infty)$ , לא קיים מקסימום.
- ד. עבור קטעים מהטיפוס :  $(-\infty, b), [a, b), (a, b)$ , הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.
- ה. אם  $S$  היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- $S$  יש חסם עליון, ומתקיים  $\max S = \sup S$ .

(12) תהי  $A$  תת-קבוצה לא ריקה של  $\mathbb{R}$ , ויהי  $x \in \mathbb{R}$ .

$$d(x, A) = \inf \{|x - a| \mid a \in A\}$$

נגדיר את המרחק בין  $x$  ל- $A$  על ידי :

אם  $\alpha \in \mathbb{R}$  הוא החסם העליון של  $A$ , הראה כי  $d(\alpha, A) = 0$ .

(13) הוכח שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

(14) הוכח שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.

(15) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. נניח ש- $K$  קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.  
נתבונן בקבוצה  $-K = \{-x \mid x \in K\}$ .  
הוכח שהקבוצה  $-K$  חסומה מלמעלה.
- ב. הוכח שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

(16) תהי  $T$  קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.

תהי  $S$  קבוצה חלקית לא ריקה של  $T$ .  
הוכח כי :

- א. ל- $T$  יש חסם עליון  $\sup T$ .
- ב. ל- $S$  יש חסם עליון  $\sup S$ .
- ג.  $\sup S \leq \sup T$ .
- ד. אם  $S$  ו- $T$  בעלות מקסימום, אז  $\max S \leq \max T$ .

- 17** יהיו  $A$  ו- $B$  שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.  
 א. נניח כי לכל  $x \in A$  קיים  $y \in B$  כך ש- $x < y$ .  
 הוכח כי  $\sup A \leq \sup B$ .  
 האם יהיה נכון לומר ש- $\sup A < \sup B$ ?
- ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל  $y \in B$  קיים  $x \in A$  כך ש- $y < x$ .  
 הוכח כי  $\sup A = \sup B$ .
- 18** נניח ש- $A$  ו- $B$  הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,  
 כך ש- $\sup A = \inf B$ .  
 הוכח שלכל מספר  $\delta > 0$ , קיים מספר  $x$  ב- $A$ , ומספר  $y$  ב- $B$ , כך ש- $x + \delta > y$ .
- 19** נניח ש- $A$  ו- $B$  הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,  
 כך ש- $\sup A \leq \inf B$ .  
 נניח שלכל מספר  $\delta > 0$  קיים מספר  $x$  ב- $A$ , ומספר  $y$  ב- $B$ , כך ש- $x + \delta > y$ .  
 הוכח כי  $\sup A = \inf B$ .
- 20** נניח ש- $A$  קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום,  
 ונניח כי  $x < \sup A$ .  
 הוכח שיש לפחות שני איברים בקבוצה  $A$ , שנמצאים בין  $x$  ל- $\sup A$ .
- 21** תהי  $S$  קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.  
 הוכח כי אם  $c \geq 0$ , אז ל- $c \cdot S$  יש חסם עליון, ומתקיים  $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$ .
- 22** יהיו  $S$  ו- $T$  קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 הוכח כי הקבוצה  $S + T$  היא בעלת חסם עליון ומתקיים:  
 $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$ .
- 23** יהיו  $S$  ו- $T$  קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 א. הוכח כי הקבוצה  $S \cup T$  היא בעלת חסם עליון.  
 ב. הוכח כי  $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$ .
- 24** תהיינה  $U, T, S$  קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 נניח כי לכל  $s \in S$  ולכל  $t \in T$  קיים  $u \in U$ , המקיים את התנאי:  $u \geq s + t$ .  
 הוכח כי  $\sup U \geq \sup T + \sup S$ .

(25) הוכח את הטענות הבאות:

- א. אם  $S$  ו- $T$  הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, כך שכל איבר של  $S$  אינו גדול משום איבר של  $T$ , אז קיימים  $\sup S, \inf T$ , ומתקיים:  $\sup S \leq \inf T$ .
- ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה  $S$  מתקיים:  $\inf S \leq \sup S$ . האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

(26) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. נסח והוכח את משפט ארכימדס.
- ב. נסח והוכח את תכונת ארכימדס.
- ג. הוכח שלכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$  קיים מספר טבעי  $n$ , כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .
- ד. הוכח שלכל שני מספרים ממשיים  $\alpha, \beta$ , המקיימים  $\alpha < \beta$ , קיים מספר טבעי  $n$ , כך ש- $\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$  וגם  $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$ .

(27) תהי  $A$  תת-קבוצה לא ריקה של  $\mathbb{R}$  ויהי  $\alpha \in \mathbb{R}$  חסם מלעיל של  $A$ .

- נניח שלכל  $n \in \mathbb{N}$  קיים  $a_n \in A$ , כך ש- $a_n > \alpha - \frac{1}{n}$ .
- הוכח כי  $\alpha$  הוא הסופרמום של  $A$ .

(28) הוכח שלכל מספר ממשי  $c$  קיים מספר שלם יחיד  $m \in \mathbb{Z}$ , כך ש- $m \leq c < m+1$ . למספר  $m$  קוראים הערך השלם של  $c$ , ומסמנים  $m = [c]$ .

(29) יהיו  $a$  ו- $b$  שני מספרים ממשיים המקיימים  $|a-b| < \frac{1}{n}$ , לכל מספר טבעי  $n$ . הוכח כי  $a = b$ .

(30) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = [n, \infty)$ . הוכח כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .
- ב. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$ . הוכח כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$ .

(31) ענה על הסעיפים הבאים :

א. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = [a_n, b_n]$ .

נניח כי  $I_{n+1} \subset I_n$  לכל  $n$ .

הוכח כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ .

ב. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ .

הוכח כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .

ג. בסעיף ב' התקיים כי  $I_{n+1} \subset I_n$  לכל  $n$ , וכן  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .

האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

(32) לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ .

הוכח כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\min A = \inf A = 0, \sup A = 1$ .
- (2) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\max A = \sup A = \frac{1}{4}, \inf A = 0$ .
- (3) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\min A = \inf A = \frac{5}{12}, \sup A = \frac{1}{2}$ .
- (4) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\sup A = c, \inf A = [c]$ .
- (5) א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב.  $\min A = 4$ .
- (6) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.  
 ב.  $\max A = 7$ .
- (7) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי  $\frac{4}{5}$ , וחסומה מלמטה על ידי  $\frac{3}{5}$ ;  
 לכן, הקבוצה חסומה. ב.  $\sup A = \frac{4}{5}, \min A = \frac{3}{5}$ .
- (8) א.  $\max A = \frac{5}{4}, \inf A = -1$ . ב.  $\min B = 0, \max B = 2$ . ג.  $\min C = -2, \sup C = 2$ . ד.  $\inf D = 0, \sup D = 2$ .

שאלות 9-32 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל-[www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## קבוצה צפופה

### שאלות

- (1) הוכח שקבוצת הממשיים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (2) הוכח שקבוצת הרציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (3) הוכח שקבוצת האי-רציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- (4) הוכח שהקבוצה  $A = \{\sqrt{10}q \mid q \in \mathbb{Q}\}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (5) הוכח שהקבוצה  $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (6) יש המגדירים קבוצה צפופה בממשיים כך:
 

תת-קבוצה  $S$  של  $\mathbb{R}$  היא צפופה (ב- $\mathbb{R}$ ), אם לכל  $x \in \mathbb{R}$  ולכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $s \in S$ , כך ש- $|s - x| < \varepsilon$ .

הוכח שאם  $S$  תת-קבוצה של  $\mathbb{R}$  מקיימת את התכונה, שלכל  $a, b \in \mathbb{R}$  קיים  $s \in S$ , כך ש- $a < s < b$ , אז  $S$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- (7) הוכח שהקבוצה  $A = \{q\sqrt{10} \mid 0 < q \in \mathbb{Q}\}$  צפופה ב- $[0, 1]$ .
- (8) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע  $(1, \infty)$ . הוכח שהקבוצה  $B = \left\{ \frac{a}{n} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  צפופה בקטע  $(0, 1)$ .
- (9) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע  $[0, 1]$ . הוכח שהקבוצה  $B = \{na \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$  צפופה בקטע  $[0, \infty)$ .
- (10) הוכח, שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים, שלא מופיעה בהם הספרה 4, אינה צפופה בקטע  $I = [0, 1]$ .

**11**) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע  $(1, \infty)$  וצפופה בו.

הוכח שהקבוצה  $C = \left\{ \frac{a}{n^2(a+1)} : a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  אינה צפופה בקטע  $[0, 1]$ .

**12**) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע  $[0, 1]$ .

הוכח שהקבוצה  $C = \left\{ \frac{a+1}{n^2} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  אינה צפופה בקטע  $[0, 1]$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## הערך השלם

### שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות:

א.  $[x+4]=10$

ב.  $[x+4]=-10$

ג.  $[x+4]^2=100$

ד.  $[2x^2+1]=9$

ה.  $[x^2+x-1]=-2$

ו.  $[x^2-\ln x+e^x-x^5]=0.5$

2) פתור את המשוואה  $[x+4]=2x+1$ .

3) פתור את המשוואה  $[16x^2+7]=8x+6$ .

4) פתור את המשוואה  $[x^2+x+4]=2x+6$ .

5) פתור את המשוואות הבאות:

א.  $[|x-4|+x]=4x+4$

ב.  $[|x+1|-|x-1|]=x$

6) פתור את המשוואה  $[4+[x+1]]=10$ .

7) הוכיחו כי לכל  $x$  ממשי ו- $m$  שלם מתקיים  $[x+m]=[x]+m$ .

8) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א.  $[x+4]<10$

ב.  $[x+4]>-10$

ג.  $[x+4]^2<100$

ד.  $[x+4]\leq 10$

9 פתור את אי-השוויונים הבאים :

א.  $[x]^2 - 5[x] + 6 \leq 0$

ב.  $[x-1][x-2] + [x+10] > 3[x+2] + [2.44]$

10 הוכיחו, כי לכל  $x$  ו- $y$  ממשיים, מתקיים :

א.  $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$

ב.  $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$

### תשובות סופיות

- 1 א.  $6 \leq x < 7$     ב.  $-14 \leq x < -13$     ג.  $[6,7) \cup [14,-13)$
- ד.  $(-\sqrt{4.5}, -2] \cup [2, \sqrt{4.5})$     ה.  $-1 < x < 0$     ו.  $\emptyset$
- 2  $x = 2.5, 3$
- 3  $x = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$
- 4  $x = -1, 2$
- 5 א.  $x = 0$     ב.  $x = 2, 0, -2$
- 6  $5 \leq x < 6$
- 7 שאלת הוכחה.
- 8 א.  $x < 6$     ב.  $x > -14$     ג.  $-14 < x < 6$     ד.  $x < 7$
- 9 א.  $2 \leq x < 4$     ב.  $x < 1$  or  $x > 4$
- 10 שאלת הוכחה.

## סימן הסכימה

## שאלות

1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \sum_{n=0}^{10} 4^n & \text{ב.} & \sum_{k=1}^4 2k \\ \text{ב.} & \sum_{k=1}^4 2k & \text{ג.} & \sum_{n=4}^{10} na_n \\ \text{ד.} & \sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i & \text{ה.} & \sum_{t=1}^8 tx^t \\ \text{ז.} & \sum_{k=1}^{10} 4n & \text{ח.} & \sum_{k=-1}^3 (k^2 + 1) \\ \text{ט.} & \sum_{\ell=1}^3 (\ell^2 - x_{2\ell} - 4) & \text{ו.} & \sum_{k=4}^{10} na_{k+1} \end{array}$$

2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה :

$$\begin{array}{l} \text{א.} \quad 1+2+4+8+16+32+64+128 \\ \text{ב.} \quad 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 \\ \text{ג.} \quad 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \\ \text{ד.} \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 \\ \text{ה.} \quad 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 43 \cdot 44 \\ \text{ו.} \quad 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 21 \cdot 8 \\ \text{ז.} \quad 5^2 + 7^2 + \dots + 27^2 \\ \text{ח.} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11} \\ \text{ט.} \quad \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \frac{14}{81} + \frac{18}{243} \\ \text{י.} \quad 4 + \frac{8}{5} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{20}{625} \end{array}$$

3) חשב את הסכומים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \sum_{k=1}^{10} 4k & \text{ב.} & \sum_{k=1}^{10} (2k + 4k^2) \\ \text{ד.} & \sum_{k=10}^{24} \frac{k^3 - k}{k+1} & \text{ה.} & \sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2) \\ \text{ג.} & \sum_{k=10}^{24} k(k-1) & \text{ו.} & \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1)(k-2) \end{array}$$

\* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה'):

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

(4) חשב את הסכומים הבאים:

$$\text{א. } \sum_{k=1}^{20} \frac{5 \cdot 4^k + 8^k}{2^k} \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{11} \frac{2 \cdot 4^{k+2} + 10^k}{0.4^k} \quad \text{ג. } \sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$$

$$* \text{ תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: } \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

(5) חשב את הסכומים הבאים:

$$\text{א. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$$

$$\text{ב. } 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 24^2$$

$$\text{ג. } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2$$

$$\text{ד. } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2$$

(6) הוכח כי:

$$\text{א. } \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+4}}{k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1} = \sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$$

(7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

$$\text{א. } \sum_4^{11} k^2 \quad \text{ב. } \sum_{10}^{20} 4^{2k}$$

## תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10}$$

$$\text{ב. } 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$\text{ג. } 4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 4a_9 + 4a_{10}$$

$$\text{ד. } 4 \cdot 7^2 a_7 + 4 \cdot 8^2 a_8 + 4 \cdot 9^2 a_9 + 4 \cdot 10^2 a_{10} + 4 \cdot 11^2 a_{11} + 4 \cdot 7^2 a_7$$

$$\text{ה. } 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8$$

$$\text{ו. } na_5 + na_6 + na_7 + na_8 + na_9 + na_{10} + na_{11}$$

$$\text{ז. } 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n$$

$$\text{ח. } ((-1)^2 + 1) + (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1)$$

$$\text{ט. } (1^2 - x_2 - 4) + (2^2 - x_4 - 4) + (3^2 - x_6 - 4)$$

$$(2) \text{ א. } \sum_{k=0}^7 2^k \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{10} 2k \quad \text{ג. } \sum_{k=0}^9 (2k+1) \quad \text{ד. } \sum_{k=1}^7 k(k+1)$$

$$\text{ה. } \sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k \quad \text{ו. } \sum_{k=1}^7 3k(k+1) \quad \text{ז. } \sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$$

$$\text{ח. } \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{ט. } \sum_{k=1}^5 \frac{4k-2}{3^k} \quad \text{י. } \sum_{k=1}^4 \frac{4k}{5^{k-1}}$$

$$(3) \text{ א. } 220 \quad \text{ב. } 1650 \quad \text{ג. } 4360$$

$$\text{ד. } 4360 \quad \text{ה. } 28 \quad \text{ו. } 4545$$

$$(4) \text{ א. } 5 \cdot (2^{21} - 2) + \frac{4}{3}(4^{20} - 1) \quad \text{ב. } 32 \cdot \frac{10(10^{11} - 1)}{10 - 1} + \frac{25(25^{11} - 1)}{25 - 1}$$

$$\text{ג. } 2^{10} \left[ \frac{4(4^{20} - 1)}{4 - 1} - \frac{4(4^9 - 1)}{4 - 1} \right]$$

$$(5) \text{ א. } 2870 \quad \text{ב. } 4886 \quad \text{ג. } 2024 \quad \text{ד. } 969$$

(6) הוכחה.

$$(7) \text{ א. } 8 \cdot 8 + 6 \cdot \frac{8(8+1)}{2} + \frac{8(8+1)(2 \cdot 8 + 1)}{6} \quad \text{ב. } 4^{18} \cdot \frac{16(16^{11} - 1)}{16 - 1}$$

## אינדוקציה

### שאלות

(1) הוכח באינדוקציה כי  $4 \cdot 10^n + 14 \cdot 19^n$  מתחלק ב-9 לכל  $n$  טבעי.

(2) הוכח באינדוקציה כי  $\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$  ( $k, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ ).

(3) מצא את ה- $n$  הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים  $2^n \geq n^2$ , והוכח באינדוקציה שעבור כל  $n$  טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

(4) הוכח את הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה כי  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , לכל  $n$  טבעי ולכל  $x \geq -1$  ממשי.  
 הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכח כי  $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ , לכל  $n$  טבעי.  
 רמז: היעזר בתוצאת סעיף א'.

(5) הוכח באינדוקציה כי  $(1-x)^n < \frac{1}{1+xn}$  לכל  $0 < x < 1, n \in \mathbb{N}$ .

(6) הוכח באינדוקציה כי  $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ , לכל  $n \in \mathbb{N}$ .  
 רמז: היעזר במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

(7) נתון כי  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, a_1 = \sqrt{2}$ .

הוכח באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי מתקיים:

א.  $a_n \leq 2$

ב.  $a_n \leq a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיבית.

(8) הוכח באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי,

אם  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2, a_1 = -1, a_2 = 0$ ,

אז  $a_n = n^2 - 2n$ .

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיבית.

9) הוכח באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי,

$$\text{אם } a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 1,$$

$$\text{אז } a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n.$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיביות.

10) הוכח באינדוקציה כי  $4^n - 1$  מתחלק ב-15, לכל  $n$  טבעי זוגי.

$$11) \text{ הוכח באינדוקציה כי } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \text{ (} n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \text{).}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

הערה: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים"

בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## פתרון אי שוויונים

### שאלות

פתור את אי השוויונים הבאים :

$$(1) \quad x^2 - 12x > -32$$

$$(2) \quad (x-3)(x-7) \geq 8x - 56$$

$$(3) \quad 2x^2 + 2x + 24 \geq 0$$

$$(4) \quad \frac{x-1}{x^2-9} > 0$$

$$(5) \quad \frac{2x-1}{x-5} \leq 0$$

$$(6) \quad \frac{x^2 - 7x + 6}{-x^2 + 3x - 7} \geq 0$$

$$(7) \quad |x+2| < 3$$

$$(8) \quad |6-2x| < x$$

$$(9) \quad |2x+3| < 8 < |5-x|$$

$$(10) \quad x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$$

$$(11) \quad |2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$$

$$(12) \quad \sqrt{x+3} < 7$$

$$(13) \quad \frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$$

$$(14) \quad \sqrt{x^2+x-6} < x-3$$

הערה : לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

## תשובות סופיות

(1)  $x < 4$  או  $x > 8$

(2)  $x \leq 7$  או  $x \geq 11$

(3) כל  $x$

(4)  $-3 < x < 1$  או  $x > 3$

(5)  $\frac{1}{2} \leq x < 5$

(6)  $1 \leq x \leq 6$

(7)  $-5 < x < -1$

(8)  $2 < x < 6$

(9)  $-5\frac{1}{2} < x < -3$

(10)  $x < -5$  או  $x > 7$

(11)  $x < -1$  או  $x > 4$

(12)  $-3 \leq x < 46$

(13)  $x < 0.472$

(14) אין פתרון.

## אי שוויונים מפורסמים

### שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שלכל שני מספרים ממשיים  $x, y$  המקיימים  $x < 1, y > 1$ , מתקיים  $x + y > xy + 1$ .

ב. הוכח באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי:

אם  $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$ , אז  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$  ( $0 < a_i \in \mathbb{R}$ ).

(2) נסח והוכח את אי שוויון הממוצעים.

(3) הוכח שלכל  $a, b \in \mathbb{R}$  מתקיים:

א.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (אי שוויון המשולש)

ב.  $|a - b| \leq |a| + |b|$

ג.  $|a - b| \geq |b| - |a|$ ,  $|a - b| \geq |a| - |b|$

ד.  $|a - b| \geq ||a| - |b||$

ה.  $|a + b| \geq ||a| - |b||$

ו.  $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$  ( $a_i \in \mathbb{R}$ )

(4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נסח והוכח את אי שוויון קושי-שוורץ.

ב. הוכח כי אם  $a_1 + \dots + a_n = 1$  אז  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ ).

הערה: אי שוויון ברנולי מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".

נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

### שאלות

(1) חשב, ללא מחשבון:

א.  $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב.  $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

(2) הוכח את הזהויות הבאות:

א.  $(n-2)!(n^2 - n) = n!$

ב.  $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג.  $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2 - 2}{(n+1)!}$

(3) חשב:

א.  $\binom{5}{3}$       ב.  $\binom{4}{1}$       ג.  $\binom{10}{0}$       ד.  $\binom{14}{11}$

(4) הוכח את הזהויות הבאות:

א.  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$       ב.  $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$       ג.  $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

(5) הוכח באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{2}$$

(6) רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א.  $(a+b)^4$       ב.  $(x+2)^5$       ג.  $(x-4)^3$

(7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח  $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$  לכל  $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

8 הוכח שלכל  $n \geq 1$  טבעי מתקיים :

$$\text{א. } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\text{ב. } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\text{ג. } \binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - \dots + 3^n \binom{n}{n} = 4^n$$

9 מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום  $\left(\frac{1}{2a} + 2a^2\right)^{10}$ .

10 בפיתוח של  $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{a})^{12}$ , ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא  $a^7$ . מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

11 מצא, בפיתוח של  $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)^{10}$ , איבר שאינו מכיל את  $x$ , וחשב את ערכו.

12 ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא, בפיתוח של  $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$ , את המקדם של  $\frac{1}{x}$ .

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם  $a = b = 1$ .

13 המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום  $(a+b)^n$ , הוא 15. מצא את  $n$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } \frac{1}{30} \quad \text{ב. } \frac{1001}{285}$$

(2) שאלת הוכחה.

$$(3) \quad \text{א. } 10 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 1 \quad \text{ד. } 364$$

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

$$(6) \quad \text{א. } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{ב. } (x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

$$\text{ג. } (x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

$$(9) \quad T_4 = \frac{15}{2a}$$

$$(10) \quad T_7 = 924a^7$$

$$(11) \quad T_9 = 45$$

$$(12) \quad \text{א. } \frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6} \quad \text{ב. } 2^{18}$$

$$(13) \quad n = 6$$

## שדות

## שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור ( $\oplus$ ) וכפל ( $\otimes$ ) על  $R$ .

בדוק, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & x \oplus y = x + y + 4 & x \oplus y = x + y \\ \text{ב.} & x \otimes y = 2xy & x \otimes y = x + y \\ \text{ג.} & x \oplus y = y & x \otimes y = y^2 \end{array}$$

2) נתונה הקבוצה  $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ .

על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

הוכח שהקבוצה  $Q[\sqrt{2}]$ , עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

- הוכח שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
- הוכח שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
- הוכח שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
- הוכח שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

4) יהיו  $a, b$  איברים בשדה.

- הוכח כי  $a + a = a \Leftrightarrow a = 0$ .
- הוכח כי  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ .
- הוכח כי  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ .

5) יהיו  $a$  ו- $b$  איברים של שדה.

הוכח כי:

- $(-1) \cdot a = -a$ .
- $(-a)b = a(-b) = -ab$ .

6) הוכח שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.

כלומר, הוכח כי  $ab = cb \Rightarrow a = c$ , לכל  $a, b, c$ , בשדה ( $b \neq 0$ ).

## תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)