

# חדוא 1

## פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

### תוכן העניינים

1. מבוא לתורת הקבוצות..... 1
2. המספרים האי-רציונליים..... 7
3. סימן הסכימה..... 8
4. אינדוקציה..... 11
5. אי שוויונים מפורסמים..... 13
6. פתרון אי שוויונים..... 14
7. עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון..... 16

## מבוא לתורת הקבוצות

### שאלות

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y : (x + y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y : (x + y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  (  $k$  ו- $n$  טבעיים).

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

(7) מצא שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$ ,  $C = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{6, 7, 8\}$ ,  $E = \{7, 8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$ .

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$ .

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$ .

(9) הוכח:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

**(10)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(11)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^x = 0\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(12)** נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשב את  $(A - B) - C$ .

ב. חשב את  $A - (B - C)$ .

**(13)** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ ,  $A = \{12, 15, 18\}$ ,  $B = \{13, 15, 17\}$

הדגם את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(14)** הוכח את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(15)** מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**(16)** הצג באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$                    | ב. $A \cup B$                    |
| ג. $A^c$                         | ד. $A \cap B^c$                  |
| ה. $A^c \cap B$                  | ו. $A \cup B^c$                  |
| ז. $A^c \cup B$                  | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ |                                  |

**(17)** ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח כי  $A \setminus B = A \cap B^c$ .  
הראה זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן:  $X = C \setminus (A \cap B)$ ,  $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .  
הוכח כי  $X = Y$ .
- ג. נסמן:  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  
הוכח כי  $X = Y$ .

**(18)** תהיינה  $X, Y, Z$  קבוצות כלשהן.

- טענה א':  $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ .
- טענה ב':  $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$ .
- טענה ג':  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z$ .
- איזו טענה נכונה לכל בחירה של  $X, Y, Z$ ?

**(19)** הוכח כי אם הנקודה  $x_1$  שייכת לסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ , אז קיימת סביבת  $\delta$  של  $x_1$  שמוכלת בסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ .

**(20)** הוכח שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

**(21)** הוכח כי אם  $x_0$  לא שייכת לקטע הסגור  $[a, b]$ , אז קיימת סביבה של הנקודה  $x_0$  אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע  $[a, b]$ .

**(22)** הוכח כי אם  $|x - x_0| < \varepsilon$ ,  $|y - y_0| < \varepsilon$ , אז  $|xy - x_0y_0| < \varepsilon(|x_0| + |y_0| + \varepsilon)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים. ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$   $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  (1),  $A \cap B = \{4, 6, 8\}$  (2),  $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$  (3)
- $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$  (4),  $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$  (5)
- (11)  $A \cup B = (-2, 4)$  (1),  $A \cap B = \emptyset$  (2),  $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$  (3),  
 $(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1)$  (4),  $(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1)$  (5)

12) א.  $\phi$  ב.  $\{4,5,6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א.  $A^c = (-\infty, 1)$  ב.  $B^c = [1, 4]$  ג.  $C^c = [1, 4]$

ד.  $D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענה ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

## המספרים האי-רציונליים

### שאלות

- (1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכח שהמספר זוגי.  
 ב. הוכח כי  $\sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכח שהמספר מתחלק ב-3.  
 ב. הוכח כי  $\sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכח שהמספר זוגי.  
 ב. הוכח כי  $\sqrt[3]{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (4) הוכח כי  $\sqrt{n}$  הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- $n$  טבעי שאינו ריבוע של מספר).
- (5) הוכח או הפרך:  
 א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
 ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.  
 ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
 ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.
- (6) א. הוכח כי  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
 ב. הוכח כי  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
 ג. הוכח כי  $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (7) א. יהי  $p$  מספר ראשוני ויהיו  $a, k$  מספרים טבעיים.  
 הוכח כי:  $p | a \Leftrightarrow p | a^k$ .  
 ב. הוכח: אם  $n \neq N^k$ , אז  $\sqrt[k]{n}$  הוא מספר אי-רציונלי ( $n, k, N \in \mathbb{N}$ ).
- הערת סימון: אם מספר  $a$  מתחלק במספר  $b$  מסמנים  $b | a$ ,  
 ואומרים גם "  $b$  מחלק את  $a$  ".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## סימן הסכימה

### שאלות

1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים :

$\sum_{n=4}^{10} na_n \quad .ג.$	$\sum_{k=1}^4 2k \quad .ב.$	$\sum_{n=0}^{10} 4^n \quad .א.$
$\sum_{k=4}^{10} na_{k+1} \quad .ו.$	$\sum_{t=1}^8 tx^t \quad .ה.$	$\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i \quad .ד.$
$\sum_{\ell=1}^3 (\ell^2 - x_{2\ell} - 4) \quad .ט.$	$\sum_{k=-1}^3 (k^2 + 1) \quad .ח.$	$\sum_{k=1}^{10} 4n \quad .ז.$

2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה :

$1+2+4+8+16+32+64+128 \quad .א.$	$2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 \quad .ב.$
$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \quad .ג.$	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 \quad .ד.$
$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 43 \cdot 44 \quad .ה.$	$3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 21 \cdot 8 \quad .ו.$
$5^2 + 7^2 + \dots + 27^2 \quad .ז.$	$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11} \quad .ח.$
$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \frac{14}{81} + \frac{18}{243} \quad .ט.$	$4 + \frac{8}{5} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{20}{625} \quad .י.$

3) חשב את הסכומים הבאים :

$\sum_{k=10}^{24} k(k-1) \quad .ג.$	$\sum_{k=1}^{10} (2k + 4k^2) \quad .ב.$	$\sum_{k=1}^{10} 4k \quad .א.$
$\sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1)(k-2) \quad .ו.$	$\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2) \quad .ה.$	$\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3 - k}{k+1} \quad .ד.$

\* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה'):

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

(4) חשב את הסכומים הבאים:

$$\text{א. } \sum_{k=1}^{20} \frac{5 \cdot 4^k + 8^k}{2^k} \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{11} \frac{2 \cdot 4^{k+2} + 10^k}{0.4^k} \quad \text{ג. } \sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$$

$$* \text{ תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: } \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

(5) חשב את הסכומים הבאים:

$$\text{א. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$$

$$\text{ב. } 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 24^2$$

$$\text{ג. } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2$$

$$\text{ד. } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2$$

(6) הוכח כי:

$$\text{א. } \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+4}}{k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1} = \sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$$

(7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

$$\text{א. } \sum_4^{11} k^2 \quad \text{ב. } \sum_{10}^{20} 4^{2k}$$

## תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10}$$

$$\text{ב. } 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

$$\text{ג. } 4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 4a_9 + 4a_{10}$$

$$\text{ד. } 4 \cdot 7^2 a_7 + 4 \cdot 8^2 a_8 + 4 \cdot 9^2 a_9 + 4 \cdot 10^2 a_{10} + 4 \cdot 11^2 a_{11} + 4 \cdot 7^2 a_7$$

$$\text{ה. } 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8$$

$$\text{ו. } na_5 + na_6 + na_7 + na_8 + na_9 + na_{10} + na_{11}$$

$$\text{ז. } 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n$$

$$\text{ח. } ((-1)^2 + 1) + (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1)$$

$$\text{ט. } (1^2 - x_2 - 4) + (2^2 - x_4 - 4) + (3^2 - x_6 - 4)$$

$$(2) \text{ א. } \sum_{k=0}^7 2^k \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{10} 2k \quad \text{ג. } \sum_{k=0}^9 (2k+1) \quad \text{ד. } \sum_{k=1}^7 k(k+1)$$

$$\text{ה. } \sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k \quad \text{ו. } \sum_{k=1}^7 3k(k+1) \quad \text{ז. } \sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$$

$$\text{ח. } \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{ט. } \sum_{k=1}^5 \frac{4k-2}{3^k} \quad \text{י. } \sum_{k=1}^4 \frac{4k}{5^{k-1}}$$

$$(3) \text{ א. } 220 \quad \text{ב. } 1650 \quad \text{ג. } 4360$$

$$\text{ד. } 4360 \quad \text{ה. } 28 \quad \text{ו. } 4545$$

$$(4) \text{ א. } 5 \cdot (2^{21} - 2) + \frac{4}{3}(4^{20} - 1) \quad \text{ב. } 32 \cdot \frac{10(10^{11} - 1)}{10 - 1} + \frac{25(25^{11} - 1)}{25 - 1}$$

$$\text{ג. } 2^{10} \left[ \frac{4(4^{20} - 1)}{4 - 1} - \frac{4(4^9 - 1)}{4 - 1} \right]$$

$$(5) \text{ א. } 2870 \quad \text{ב. } 4886 \quad \text{ג. } 2024 \quad \text{ד. } 969$$

(6) הוכחה.

$$(7) \text{ א. } 9 \cdot 8 + 6 \cdot \frac{8(8+1)}{2} + \frac{8(8+1)(2 \cdot 8+1)}{6} \quad \text{ב. } 4^{18} \cdot \frac{16(16^{11} - 1)}{16 - 1}$$

## אינדוקציה

### שאלות

(1) הוכח באינדוקציה כי  $4 \cdot 10^n + 14 \cdot 19^n$  מתחלק ב-9 לכל  $n$  טבעי.

(2) הוכח באינדוקציה כי  $\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$  ( $k, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ ).

(3) מצא את ה- $n$  הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים  $2^n \geq n^2$ , והוכח באינדוקציה שעבור כל  $n$  טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

(4) הוכח את הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה כי  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , לכל  $n$  טבעי ולכל  $x \geq -1$  ממשי.  
 הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכח כי  $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ , לכל  $n$  טבעי.  
 רמז: היעזר בתוצאת סעיף א'.

(5) הוכח באינדוקציה כי  $(1-x)^n < \frac{1}{1+xn}$  לכל  $0 < x < 1, n \in \mathbb{N}$ .

(6) הוכח באינדוקציה כי  $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ , לכל  $n \in \mathbb{N}$ .  
 רמז: היעזר במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

(7) נתון כי  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, a_1 = \sqrt{2}$ .

הוכח באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי מתקיים:

א.  $a_n \leq 2$

ב.  $a_n \leq a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיבית.

(8) הוכח באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי,

אם  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2, a_1 = -1, a_2 = 0$ ,

אז  $a_n = n^2 - 2n$ .

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיבית.

9) הוכח באינדוקציה שלכל  $n$  טבעי,

$$\text{אם } a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 1,$$

$$\text{אז } a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n.$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מהי סדרה רקורסיביות.

10) הוכח באינדוקציה כי  $4^n - 1$  מתחלק ב-15, לכל  $n$  טבעי זוגי.

$$11) \text{ הוכח באינדוקציה כי } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \text{ (} n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \text{)}.$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

הערה: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים"

בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## אי שוויונים מפורסמים

## שאלות

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שלכל שני מספרים ממשיים  $x, y$  המקיימים  $x < 1, y > 1$ , מתקיים  $x + y > xy + 1$ .

ב. הוכח באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי:

אם  $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$ , אז  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$  ( $0 < a_i \in \mathbb{R}$ ).

(2) נסח והוכח את אי שוויון הממוצעים.

(3) הוכח שלכל  $a, b \in \mathbb{R}$  מתקיים:

א.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (אי שוויון המשולש)

ב.  $|a - b| \leq |a| + |b|$

ג.  $|a - b| \geq |b| - |a|$ ,  $|a - b| \geq |a| - |b|$

ד.  $|a - b| \geq ||a| - |b||$

ה.  $|a + b| \geq ||a| - |b||$

ו.  $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$  ( $a_i \in \mathbb{R}$ )

(4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נסח והוכח את אי שוויון קושי-שוורץ.

ב. הוכח כי אם  $a_1 + \dots + a_n = 1$  אז  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ ).

הערה: אי שוויון ברנולי מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".

נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## פתרון אי שוויונים

### שאלות

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(1) \quad x^2 - 12x > -32$$

$$(2) \quad (x-3)(x-7) \geq 8x - 56$$

$$(3) \quad 2x^2 + 2x + 24 \geq 0$$

$$(4) \quad \frac{x-1}{x^2-9} > 0$$

$$(5) \quad \frac{2x-1}{x-5} \leq 0$$

$$(6) \quad \frac{x^2 - 7x + 6}{-x^2 + 3x - 7} \geq 0$$

$$(7) \quad |x+2| < 3$$

$$(8) \quad |6-2x| < x$$

$$(9) \quad |2x+3| < 8 < |5-x|$$

$$(10) \quad x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$$

$$(11) \quad |2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$$

$$(12) \quad \sqrt{x+3} < 7$$

$$(13) \quad \frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$$

$$(14) \quad \sqrt{x^2+x-6} < x-3$$

הערה: לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.

**תשובות סופיות**

**(1)**  $x < 4$  או  $x > 8$

**(2)**  $x \leq 7$  או  $x \geq 11$

**(3)** כל  $x$

**(4)**  $-3 < x < 1$  או  $x > 3$

**(5)**  $\frac{1}{2} \leq x < 5$

**(6)**  $1 \leq x \leq 6$

**(7)**  $-5 < x < -1$

**(8)**  $2 < x < 6$

**(9)**  $-5\frac{1}{2} < x < -3$

**(10)**  $x < -5$  או  $x > 7$

**(11)**  $x < -1$  או  $x > 4$

**(12)**  $-3 \leq x < 46$

**(13)**  $x < 0.472$

**(14)** אין פתרון.

## עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

### שאלות

1) חשב, ללא מחשבון:

א.  $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב.  $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

2) הוכח את הזהויות הבאות:

א.  $(n-2)!(n^2 - n) = n!$

ב.  $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג.  $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2 - 2}{(n+1)!}$

3) חשב:

א.  $\binom{5}{3}$       ב.  $\binom{4}{1}$       ג.  $\binom{10}{0}$       ד.  $\binom{14}{11}$

4) הוכח את הזהויות הבאות:

א.  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$       ב.  $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$       ג.  $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

5) הוכח באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{2}$$

6) רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א.  $(a+b)^4$       ב.  $(x+2)^5$       ג.  $(x-4)^3$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח  $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$  לכל  $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

8 הוכח שלכל  $n \geq 1$  טבעי מתקיים :

$$\text{א. } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\text{ב. } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\text{ג. } \binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - \dots + 3^n \binom{n}{n} = 4^n$$

9 מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום  $\left(\frac{1}{2a} + 2a^2\right)^{10}$ .

10 בפיתוח של  $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{a})^{12}$ , ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא  $a^7$ . מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

11 מצא, בפיתוח של  $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)^{10}$ , איבר שאינו מכיל את  $x$ , וחשב את ערכו.

12 ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא, בפיתוח של  $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$ , את המקדם של  $\frac{1}{x}$ .

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם  $a=b=1$ .

13 המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום  $(a+b)^n$ , הוא 15. מצא את  $n$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } \frac{1}{30} \quad \text{ב. } \frac{1001}{285}$$

(2) שאלת הוכחה.

$$(3) \quad \text{א. } 10 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 1 \quad \text{ד. } 364$$

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

$$(6) \quad \text{א. } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{ב. } (x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

$$\text{ג. } (x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

$$(9) \quad T_4 = \frac{15}{2a}$$

$$(10) \quad T_7 = 924a^7$$

$$(11) \quad T_9 = 45$$

$$(12) \quad \text{א. } \frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6} \quad \text{ב. } 2^{18}$$

$$(13) \quad n = 6$$