

# פיזיקה למכינה

פרק 12 - מומנט התמד

תוכן העניינים

1. הקדמה - גוף קשיח וציר סיבוב ..... (ללא ספר)
2. מומנט התמד, הסבר בסיסי וחשוב עבור גוף נקודת ..... (ללא ספר)
3. משפט שטיינר ..... (ללא ספר)
4. אדטיביות ..... 1
5.  $I_z = I_x + I_y$  ..... (ללא ספר)
6. סימטריה ל  $z$  ..... (ללא ספר)
7. חישוב מומנט ההתמד של דיסקה סביב ציר  $Z$  וציר  $X$  ..... (ללא ספר)
8. תרגילים שונים לחישוב מומנט התמד ..... 2
9. מומנט ההתמד כמטריצה ..... 5

## אדטיביות:

### שאלות:

#### (1) דוגמה

לדסקה בעלת מסה  $M$  ורדיוס  $R$  מחברים דסקה נוספת זהה בקצה התחתון של הדסקה. מצא את מומנט ההתמד של המערכת סביב ציר המאונך למישור הדסקה והעובר בקצה העליון של הדסקה (הראשונה).



### תשובות סופיות:

$$I = 11mR^2 \quad (1)$$

## תרגילים שונים לחישוב מומנט התמד:

### שאלות:



- (1) חישוב אינטגרל של מוט לא אחיד  
חשב את מומנט ההתמד של מוט עם צפיפות ליחידת

$$\text{אורך } \lambda(x) = \lambda_0 \frac{x}{L} \text{ סביב קצה המוט.}$$

$x$  הוא המרחק מהקצה,  $L$  הוא אורך המוט ו- $\lambda_0$  נתון.

$$m, l, \lambda = Ax^2$$

- (2) חישוב נוסף מוט בצפיפות לא אחידה  
מצא את מומנט ההתמד של מוט סביב מרכזו לפי  
הנתונים שבשרטוט.  
הצפיפות הנתונה מתייחסת למרכז המוט כראשית הצירים.



- (3) שלושה מוטות מחוברים בקצה  
שלושה מוטות זהים באורך  $l$  ומסה  $m$  כל אחד מחוברים  
באופן המוצג באיור.  
מצא את מומנט ההתמד של המערכת סביב ציר הנמצא  
בנקודת החיבור בין המוטות ובמאונך למישור.



- (4) מסגרת ריבועית  
נתונה מסגרת ריבועית בעלת אורך צלע  $a$  ומסה  $M$ .  
מצא את מומנט ההתמד של מסגרת.  
א. סביב ציר העובר במרכז ובמאונך למישור המסגרת.  
ב. סביב ציר העובר במרכז המסגרת ודרך מרכז שתי  
צלעות ומקביל לשתי הצלעות האחרות.



- (5) מומנט התמד של שער חשמלי  
מצא את מומנט ההתמד של שער חשמלי בעל מסה  $m$   
ואורך  $l$  אשר בסופו מחוברת משקולת בעלת מסה  $M$   
ואורך  $L$  המסתובב סביב מרכז המסה שלו.



- (6) מומנט התמד של ריש  
מצא את מומנט ההתמד של הגוף שבשרטוט סביב מרכז המסה  
שלו בשתי דרכים שונות. אורך כל מוט  $l$  ומסתו  $m$ .

### 7) דיסקה עם חור



- א. מצא את מומנט ההתמד של דיסקה בעלת מסה  $M$  ורדיוס  $R$ , אם ידוע כי במרחק  $R$  חצי ממרכז הדיסקה קדחו חור ברדיוס רבע  $R$ . הדיסקה מסתובבת סביב ציר במרכזה (ולא במרכז המסה של המערכת).
- ב. מצא את מומנט ההתמד של הגוף סביב מרכז המסה שלו.

### 8) חצי חישוק ושתי מסות



- מצא את מומנט ההתמד של חצי החישוק שבתמונה. רדיוסו  $R$ , מסתו  $M$  ובקצותיו חוברו שתי מסות  $m$ . החישוק סובב סביב מסמר בקודקודו.

### 9) חישוב אינטגרל של ריבוע



- חשב את מומנט ההתמד של לוח ריבוע בעל אורך צלע  $a$ , מסה  $M$  וצפיפות אחידה בכל אחד מהמצבים הבאים:
- א. ציר הסיבוב הוא אחת הפאות של הריבוע.
- ב. ציר הסיבוב מקביל לפאות ועובר במרכז.
- ג. ציר הסיבוב אנך למשטח הריבוע ועובר במרכזו.

### 10) מומנט התמד של משולש



- מצא את מומנט ההתמד של המשולש סביב קודקודו הישר.

### 11) מומנט התמד של כדור מלא



- חשב את מומנט ההתמד של כדור מלא בעל רדיוס  $R$ , מסה  $M$  וצפיפות אחידה, סביב ציר העובר במרכז הכדור.

### 12) מומנט התמד של קליפה כדורית

- מצאו את מומנט ההתמד של קליפה כדורית ברדיוס  $R$  ומסה  $m$  סביב ציר העובר דרך מרכז המסה של הקליפה.

## תשובות סופיות:

$$I_0 = M \frac{L^2}{2} \quad (1)$$

$$I = \frac{12ml^2}{80} \quad (2)$$

$$I_{c.m.} = ml^2 \quad (3)$$

$$I = \frac{M}{8} \left( a^2 + \frac{l^2}{3} \right) \quad \text{ב.} \quad I_{c.m.} = \frac{M}{4} \left( \frac{l^2}{3} + a^2 \right) \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$I = \left( \frac{1}{12} ml^2 + m \left( \frac{m \cdot 0 + \frac{M(1+L)}{2}}{m+M} \right)^2 \right) + \left( \frac{1}{12} (L^2 + L^2) M + M \left( \frac{1}{2} - \left( \frac{m \cdot 0 + \frac{M(1+L)}{2}}{m+M} \right) + \frac{L}{2} \right)^2 \right) \quad (5)$$

$$I = \frac{5}{12} ml^2 \quad (6)$$

$$I_0 = I_{c.m.} + \frac{15}{16} M \cdot \left( \frac{R}{30} \right)^2 \quad \text{ב.} \quad I_0 = \frac{247}{512} MR^2 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$I_1 = I_{c.m.} + m'b^2 \quad (8)$$

$$I = M \frac{1}{6} a^2 \quad \text{ג.} \quad I = \frac{1}{12} Ma^2 \quad \text{ב.} \quad I = \frac{1}{3} Ma^2 \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$I_0 = \frac{1}{6} m(a^2 + b^2) \quad (10)$$

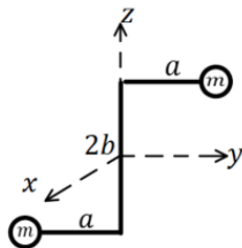
$$I = \frac{2}{5} MR^2 \quad (11)$$

$$\frac{2MR^2}{3} \quad (12)$$

## מומנט ההתמד כמטריצה:

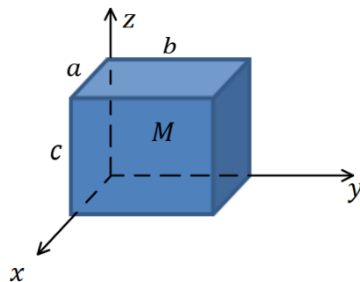
### שאלות:

#### (1) דוגמה-מנואלה



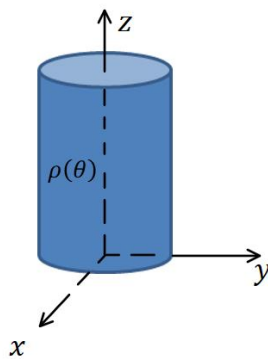
- שתי מסות נקודתיות זהות  $m$  מחוברות על ידי מוטות חסרי מסה כפי שנראה באיור. אורך המוט המרכזי הוא  $2b$  ואורך כל מוט המחובר לכדור הוא  $a$ .  
 א. מצא את כל מטריצת מומנט ההתמד של המערכת.  
 ב. מצא את התנע הזוויתי של המערכת ברגע המתואר באיור אם המהירות הזוויתית היא  $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ .

#### (2) דוגמה-מומנט התמד של קובייה



- חשב את המומנט התמד של קובייה בעלת מסה  $M$  המפולגת באופן אחיד. ראשית הצירים נמצאת בפינת הקובייה, צלעות הקובייה מקבילים לצירים ואורכייהם:  $a, b, c$ . ראה איור.

#### (3) גליל עם צפיפות התלויה בזווית



- לגליל בעל רדיוס  $R$  וגובה  $H$  יש צפיפות מסה התלויה בזווית  $\rho(\theta) = \rho_0(1 + \sin \theta)$  כאשר  $\theta$  היא הזווית ביחס לציר  $x$  בקואורדינטות גליליות.  
 א. מהי המסה הכוללת של הגליל?  
 ב. מצא את מיקום מרכז המסה של הגליל.  
 ג. חשב את:  $I_{zz}, I_{xz}, I_{yz}$ .  
 ד. חשב את התנע הזוויתי של הגליל כאשר הוא מסתובב במהירות זוויתית  $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ .  
 ה. מדוע יש הבדל בין התנע הזוויתי של הגליל בכיוונים  $x$  ו- $y$ .

## תשובות סופיות:

$$\vec{L} = -2mab\omega\hat{y} + 2ma^2\omega\hat{z} \quad \text{ב.} \quad I = 2m \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & -ab \\ 0 & -ab & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$I = M \begin{pmatrix} \frac{b^2c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$y_{c.m.} = \frac{R}{3}, \quad x_{c.m.} = 0, \quad z_{c.m.} = \frac{H}{2} \quad \text{ב.} \quad M = \rho_0 \pi R^2 H \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$I_{zz} = \frac{\pi R^4 H \rho_0}{2}, \quad I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = -\frac{\pi R^3 H^2 \rho_0}{6} \quad \text{ג.}$$

$$L_x = 0, \quad L_y = -\frac{\pi R^3 H^2 \rho_0}{6} \omega, \quad L_z = \frac{\pi R^4 H \rho_0}{2} \omega \quad \text{ד.}$$

ה. מכיוון שאנו מחשבים את התנ"י רק ברגע מסוים והתפלגות המסה אינה סימטרית בין  $x$  ל- $y$  אז יש הבדל בין התנ"י של כל ציר. בממוצע של זמן מחזור שלם התנ"י יהיה זהה לכל ציר.