GOOL
בשביל התירגול

חדוא 2

פרק 39 - מטריצות והעתקות לינאריות

תוכן העניינים

מטריצה שמייצגת העתקה

הערה:
כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת-מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים).
לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

שאלות

1) נתונים שני בסיסים של R^3:

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_2}^{B_1}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

(2 נתונה העתקה ליניארית: $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.

נתונים שני בסיסים של R^3:

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$, $B_2=\{(1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\}$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1.
סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ב. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2.
סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ג. אשר את הטענות הבאות:

1. $[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}$
2. $[T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}$
3. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[T]_{B_1}\cdot[M]_{B_1}^{B_2}=[T]_{B_2}$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

ו. מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

ז. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(3 נתונה העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$.

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$,

היא $[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$.

מהי נוסחת ההעתקה? פתור בשתי דרכים שונות.

(4 יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3, ויהי T אופרטור ליניארי על R^3.

נתון כי: $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1&-9&6\\1&6&-4\\1&5&-2\end{pmatrix}$ ו- $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29&-45&6\\20&31&-4\\13&19&-1\end{pmatrix}$.

חשב את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

5) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$T:M_2[R]\to M_2[R]$, $T(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}A$,

לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

6) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D:P_4[R]\to P_3[R]$, $D\left(p(x)\right)=p'(x)$,
לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

9) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס $B=\{1,1-x,x+x^2\}$,
היא: $[T]_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.
א. מצא את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצא את $T\left(p(x)\right)$.
* פתור בשתי דרכים שונות.
ב. מצא את $T^2\left(p(x)\right)$.

10) תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית, ותהי A מטריצה ממשית,
כך שמתקיים $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$.
נתון כי B בסיס ל-$\mathbb{R}^n$ ו-$\text{rank}(A)=n$.
הוכח כי $[T]_B$ הפיכה.

11) נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to P_3[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

היא $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

א. מצא גרעין ותמונה של ההעתקה.
ב. מצא את נוסחת ההעתקה.

12) נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה, בבסיס הסטנדרטי,

היא $[T]_E=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&9&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

א. מצא גרעין ותמונה של ההעתקה.
ב. חשב את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.
ג. מצא את נוסחת ההעתקה.

13) נתונה העתקה לינארית: $T:P_2[R]\to P_2[R]$; $T(a+bx+cx^2)=b+cx$.
הוכח ש- T העתקה נילפוטנטית.

14) יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.
נתון הבסיס $B=\{1,x,x^2\}$, ונתונה ההעתקה הלינארית
$T:V\to V$; $T\left(p(x)\right)=xp''(x)-p'(x)$.
א. מצא את המטריצה המייצגת $[T]_B$.
ב. מצא בסיס וממד עבור $\operatorname{Im}(T),\operatorname{Ker}(T)$.
הערה: בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

15) נתונות שתי העתקות ליניאריות $S,T:V\to V$.

יהי $B=\{u,v,w\}$ בסיס ל- V.

נתון כי: $\begin{cases}T(u)=u-v\\T(v)=v-w\\T(w)=w-u\end{cases}$, $\begin{cases}S(u)=u+v\\S(v)=v+w\\S(w)=w+u\end{cases}$.

א. הוכח כי: $\operatorname{Ker}(S)=\{0\}$, $\operatorname{Ker}(T)\neq\{0\}$.

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבע האם $\{T(u),T(v),T(w)\}$ פורשת את V.

ד. קבע האם $\{S(u),S(v),S(w)\}$ פורשת את V.

תשובות סופיות

1) א. $(x, y-x-z, z)$ ב. $(x, y, z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

2) א. $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ ב. $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

ד. לא. ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.

ו. 0 ע"ע יחיד ; הו"ע שלו : $(1,-1,1)$. ז. לא.

3) $T(x,y,z)=(x+y, y+z, z-x)$

4) $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0.5&-0.5&1\\-0.75&2.75&0.5\end{pmatrix}$, $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}2&3&0\\-0.5&-1&0.5\\-0.25&-1&0.75\end{pmatrix}$

5) $[T]_B=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&-1&0&2\\3&5&4&-2\\0&-2&0&6\end{pmatrix}$ **6)** $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

7) $T\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$

8) $T:P_2[R]\to P_2[R]$; $T(p(x))=p(x+1)$

9) א. $T(a+bx+cx^2)=(a+2b-2c)+(2a+4c)x+(2a+b+2c)x^2$

ב. $T^2(a+bx+cx^2)=(a+2c)1+(10a+8b+4c)x+(8a+6b+4c)x^2$

10) הוכחה.

11) א. $\operatorname{Ker}(T)=sp\{-x+x^3,-1+x^2\}$, $\operatorname{Im}(T)=sp\{1+x^2,x+x^3\}$

ב. $T(a+bx+cx^2+dx^3)=(b+d)(1)+(a+c)x+(b+d)x^2+(a+c)x^3$

12) א. $\operatorname{Ker}(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{Im}(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&4\\7&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\operatorname{tr}(T)=15$, $\det(T)=0$, $\operatorname{rank}(T)=2$

13) הוכחה.

14) א. $[T]_B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ב. $B_{\operatorname{Im}(T)}=\{1\}$, $\dim(\operatorname{Im}(T))=1$; $B_{\operatorname{Ker}(T)}=\{1,x^2\}$, $\dim(\operatorname{Ker}(T))=2$

15) הוכחה.

מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

שאלות

1) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הליניאריות הבאות, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^n:

א. $T:R^2\to R^3$, $T(x,y)=(x+y,y,-x)$

ב. $T:R^4\to R^2$, $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$

2) נתונה העתקה ליניארית $T:R^4\to R^2$; $T(x,y,z,t)=(x+y,z+t)$
מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של R^4 לבסיס הסטנדרטי של R^2.

3) תהי $T:R^3\to R^2$ העתקה ליניארית המוגדרת על ידי:
$T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$
חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס $B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ של R^3, לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של R^2.
כלומר, את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

4) עבור העתקה ליניארית $T:R^3\to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,
כאשר: $B_2=\{(1,0),\ (0,1)\}$, $B_1=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$
מצא את נוסחת ההעתקה.

5) עבור העתקה ליניארית $T:R^3\to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$
כאשר $B_2=\{(1,1),\ (1,2)\}$, $B_1=\{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (0,0,1)\}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

6) נתונה העתקה ליניארית $T:P_3[R]\to P_2[R]$.
המטריצה שמייצגת את ההעתקה T, מהבסיס הסטנדרטי של $P_3[R]$ לבסיס הסטנדרטי של $P_2[R]$, נתונה על ידי: $[T]=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\0&0&2&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to R^3$, אשר המטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, שהמטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

9) תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית, כך ש- $\dim(V)=n$,
ויהיו B_1,B_2 בסיסים סדורים של V. הוכח או הפרך:

א. $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$
ב. אם T העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$.
ג. אם T העתקת זהות, אז בהכרח $[T]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_2}=I_n$.

10) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to R^3$ המוגדרת על ידי:

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\left(a+b,b+c,c\right)$$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)
ב. הוכח שההעתקה הפיכה וחשב את $T^{-1}(a,b,c)$.
ג. חשב את $T^4\left(a+bx+cx^2\right)$.

11) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\left(a-b\right)+\left(c+d\right)x+\left(a-c\right)x^2+dx^3$$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)
ב. הוכח שההעתקה הפיכה וחשב את $T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)$.

12) חשב את ST ואת TS, עבור ההעתקות:

$S:R^2\to R^3$; $S(x,y)=(x-y,x+y,y)$

$T:P_2[R]\to R^2$; $T(a+bx+cx^2)=(a+b,b-c)$

תשובות סופיות

1) א. $[T]=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ב. $[T]=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2) $[T]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $[T]=\begin{pmatrix} 25 & 0 & -6 \\ -20 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

4) $T(x,y,z)=(x+2y+3z,4x+5y+6z)$

5) $T(x,y,z)=(x+y,y+z)$

6) $T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=(b+2c)1+(2c+6d)x+(3d)x^2$

7) $T\left(a+bx+cx^2\right)=(a+b,b+c,c)$

8) $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

9) הוכחה.

10) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ב. $T^{-1}(a,b,c)=(a-b+c)1+(b-c)x+cx^2$

ג. לא ניתן.

11) א. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$

12) $ST\left(a+bx+cx^2\right)=(a+c,a+2b-c,b-c)$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

שאלות

1) נתונה העתקה ליניארית, $T:M_2[R]\to M_2[R]$; $T(X)=PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 2.
נסמן ב- W את קבוצת כל המטריצות P, שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
היא וקטור עצמי של ההעתקה.
א. מצאו את W.
ב. הוכיחו כי W היא תת-מרחב של $M_2[R]$, ומצאו לה בסיס.

2) נתונה העתקה ליניארית, $T:M_{10}[R]\to M_{10}[R]$; $T(X)=PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 10.
ידוע כי A היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה –
המתאים לערך העצמי 4.
חשב את $|P|$.

3) מצא העתקה ליניארית T, שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,
היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה העתקה ליניארית $T(x,y,z)=(4x-y-z,x+2y-z,x-y+2z)$
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ב. נתונה העתקה ליניארית: $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.
מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

5) נתונה העתקה ליניארית $T(x,y,z)=(x+z,y,x+z)$.
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ג. במידה וכן, חשב $T^{2009}(x,y,z)$.

6) נתונה העתקה לינארית:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad ; \quad T:M_2[R]\to M_2[R]$$

א. מצא את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה ותשובתך לסעיף ג' חיובית, חשב את $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

7) נתונה העתקה לינארית: $T:P_2[R]\to P_2[R] \quad ; \quad T\left(p(x)\right)=p(x+1)$

א. מצא את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

8) יהי V מרחב וקטורי ממימד n.

תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית.

א. הוכח ש- T הפיכה אמ"ם כל הערכים העצמיים של T שונים מאפס.

ב. הוכח כי אם T הפיכה, אז ל- T ול- T^{-1} יש את אותם וקטורים עצמיים.

מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של T ושל T^{-1}?

תשובות סופיות

1) א. $W=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \middle| \lambda\in R\right\}$ ב. $B_W=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

2) $|P|=4^{10}$

3) $T:M_{2x3}(R)\to M_{2x3}(R) \quad T(X)=4X$

4) א. $v^{(2)}_{\lambda=3}=(1,0,1)$, $v^{(1)}_{\lambda=3}=(1,1,0)$, $v_{\lambda=2}=(1,1,1)$, ניתנת לליכסון.

ב. ערך עצמי: $x=0$, וקטור עצמי: $v_{x=0}=(1,-1,1)$, לא.

5) $v_{\lambda=2}=(1,0,1)$, $v_{\lambda=1}=(0,1,0)$, $v_{\lambda=0}=(-1,0,1)$ ב. ניתנת ללכסון.

ג. $T^{2009}(x,y,z)=\left(2^{2008}x+2^{2008}z, y, 2^{2008}x+2^{2008}z\right)$

6) א. $[T]_E=A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$

ב. $v^{(2)}_{x=2}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $v^{(1)}_{x=2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$, $v^{(2)}_{x=0}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $v^{(1)}_{x=0}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}$

ג. כן. ד. $T^{10}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\\ 2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t\end{pmatrix}$

7) א. $[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ ב. $v_{\lambda=1}=1$ ג. לא ניתנת לליכסון.

8) הוכחה.