

## מתמטיקה לביולוגים 2

פרק 4 - מטריצות

תוכן העניינים

1	1. מטריצות	1
3	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות	3
4	3. דרגה של מטריצה	4
7	4. מטריצה אלמנטרית	7
9	5. פירוק LU	9
10	6. תרגילי תיאוריה מתקדמים	10
12	7. המטריצה ההופכית	12
16	8. בחזרה למערכת משוואות ליניארית	16
21	9. רגרסיה ליניארית	21

## מטריצות

### שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות:  $A_{4 \times 6}$ ,  $B_{4 \times 6}$ ,  $C_{6 \times 2}$ ,  $D_{4 \times 2}$ ,  $E_{6 \times 4}$ .  
 קבע אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.  
 במידה והמטריצה מוגדרת, רשום את סדר המטריצה:

- א.  $A+B$     ב.  $AB$     ג.  $AC-D$     ד.  $AE-B$
- ה.  $B+AB$     ו.  $E(B+A)$     ז.  $(E+A^T)D$     ח.  $E^T B$
- ט.  $E(AC)$     י.  $E(B-A)$

2 מצא את  $x, y, z$ , אם ידוע כי:  $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

3 א.  $E+D$     ב.  $E-D+I_3$

ג.  $5C$     ד.  $2D+4EI_3$

4  $2tr(D^2 - 2E)$

5 א.  $4C^T + A$     ב.  $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6  $I_2 BC$

7  $tr(C^T C)$

8  $DABC$

## תשובות סופיות

(1) א.  $4 \times 6$  ב. לא. ג.  $4 \times 2$  ד. לא. ה. לא

(2) ו.  $6 \times 6$  ז.  $6 \times 2$  ח. לא. ט.  $6 \times 4$  י.  $6 \times 6$   
 $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א.  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$  ג.  $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

(4) 230 ד.  $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(5) א.  $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6)  $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$  (7) 63 (8)  $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

## מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

### שאלות

מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא סימטרית אם  $A^T = A$ , ואנטי-סימטרית אם  $A^T = -A$ .

(1) ידוע ש- $A$  מטריצה ריבועית.  
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):

1.  $AA^T$  סימטרית.
2.  $A + A^T$  סימטרית.
3.  $A - A^T$  אנטי-סימטרית.

(2) ידוע ש- $A$  ו- $B$  אנטי-סימטריות מאותו סדר.  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $BABABA$  אנטי-סימטרית.
2.  $A^2 - B^2$  סימטרית.
3.  $A^2 + B$  סימטרית.

(3) ידוע ש- $A$  ו- $B$  סימטריות מאותו סדר ונתון כי  $AB = -BA$ .  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $AB^3$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB^2$  סימטרית.
3.  $(A - B)^2$  סימטרית.

(4) ידוע ש- $A$  סימטרית ו- $B$  אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי  $AB = BA$ .  
הוכח:

1.  $AB$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB + B$  אנטי-סימטרית.

(5) נתון:  $A, B, AB$  סימטריות מאותו סדר.

הוכח כי  $A^4 B^4 = B^4 A^4$ .

### תשובות סופיות

(1) 1,2,3

(2) 2

(3) 1,2,3

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

## דרגה של מטריצה

## שאלות

(1) אמת את המשפט  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} : \text{על המטריצה:}$$

(2) אמת את המשפט  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \text{עבור:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} : \text{נתונה המטריצה:}$$

חשב את  $\text{rank}(A)$ .

(4) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n > 1$ .  
הוכח או הפרך:

א.  $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב.  $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי  $A, B$  מטריצות ריבועיות מסדר  $n > 1$ .  
הוכח או הפרך:

א. אם  $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.

ב. ייתכן ש- $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$ .

ג. אם  $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$ , אז  $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$ .

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשב את  $rank(A)$ ,  $rank(B)$ .

ב. חשב את  $rank(B^{10}A^{14})$ .

(7) נניח כי  $A, B$  שתי מטריצות ריבועיות מסדר  $n$ .

$$\text{הוכיחו כי } rank \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2rank(A) + rank(B)$$

(8) תהי  $A_{8 \times 7}$  מטריצה, כך ש- $rank(A) = 3$ .

הוכח כי קיימות 3 מטריצות  $A_1, A_2, A_3$ , שלכל אחת מהן דרגה 1,

$$\text{כך ש-} A = A_1 + A_2 + A_3$$

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר  $m \times n$  שדרגתה  $k$ .

(9) נתונות שתי מטריצות  $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$ .

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

$$\text{א. } rank(AB) = rank(BA)$$

$$\text{ב. } rank(AB) \neq rank(BA)$$

ג. המטריצה  $BA$  לא הפיכה.

## תשובות סופיות

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) אם  $k=1$ , אז  $\text{rank}(A)=2$ . אם  $k=4, k=10$ , אז  $\text{rank}(A)=3$ .
- אם  $\text{rank}(A)=4$   $k \neq 1, 4, 10$ .
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה. ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א.  $\text{rank}(A)=2$ ,  $\text{rank}(B)=3$ . ב.  $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$ .
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9) הוכחה.

## מטריצה אלמנטרית

### שאלות

(1) רשום את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(2) רשום את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(3) הוכח או הפרך כל אחד מסעיפים א-ד.  
נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית, ו- $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י סדרת פעולות דירוג.  
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א.  $A^2$  מ- $B^2$ .

ב.  $BA$  מ- $A^2$ .

ג.  $BA$  מ- $B^2$ .

ד.  $AB$  מ- $B^2$ .

(4) תהי  $A \in M_3[\mathbb{R}]$ , כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה  $E_2 E_1 A$ ?

**פתור בשתי דרכים:**

**דרך א'** – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

**דרך ב'** – בעזרת כפל מטריצות.

## תשובות סופיות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{e_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \cdot \quad (2)$$

$$\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e_8} = A$$

(3) הוכחה.

(4) -3

## פירוק LU

### שאלות

$$(1) \text{ רשום את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ רשום את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ רשום את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

### תשובות סופיות

$$(1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$$

$$(2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$$

$$(3) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

## תרגילי תיאוריה מתקדמים

### שאלות

(1) תהיינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ .

- א. אזי בהכרח מתקיים:  $AB = BA$ .
- ב. אם  $A^2 - AB = I_n$  אז בהכרח  $B$  הפיכה.
- ג. אם  $(AB)^{100} = I$  אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .
- ד. אם  $(AB)^{100} = 0$  אז בהכרח  $(BA)^{101} = 0$ .
- ה. אף תשובה אינה נכונה.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , עבורן  $A^2 + AB$  היא מטריצה היחידה. הוכיחו ש- $AB = BA$ .
- ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$  היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם  $B$  היא מטריצת האפס.

(3) תהיינה  $A, B$  מטריצות כלשהן. אזי בהכרח:

- א. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה ריבועית, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- ב. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה הפיכה, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- ג. אם  $A$  מטריצה ריבועית והמכפלה  $AB$  מוגדרת, אזי  $B$  מטריצה ריבועית.
- ד. אם  $A, B$  מטריצות ריבועיות מאותו סדר, וכן  $rank(A) > rank(B)$ , אזי  $rank(AB) > rank(B)$ .
- ה. אף תשובה אינה נכונה.

(4) תהינה  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $BA = AB$ .  
 א. אם  $A, B$  סימטריות הוכיחו כי  $AB^2$  סימטרית.

ב. נניח כי  $\text{rank} A = n-1$  ו- $v \neq 0$  הוא וקטור המקיים  $Av = 0$ ,  
 הוכח כי  $Bv$  הוא כפולה של  $v$  בסקלר.

(5) תהינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ .  
 אזי בהכרח מתקיים:

א.  $AB = BA$

ב. אם  $A^2 - AB = I_n$  אז בהכרח  $AB = BA$ .

ג. אם  $(AB)^{100} = I$  אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .

ד. אם  $(AB)^{100} = 0$  אז בהכרח  $(BA)^{100} = 0$ .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(6)  $A$  מטריצה ריבועית,  $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י סדרת פעולות דירוג (בשורות).  
 ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א.  $B^2$  מ- $A^2$ .

ב.  $BA$  מ- $A^2$ .

ג.  $B^2$  מ- $BA$ .

ד.  $B^2$  מ- $AB$ .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

### תשובות סופיות

- |         |            |       |            |
|---------|------------|-------|------------|
| (1) ג+ד | (2) הוכחה. | (3) ה | (4) הוכחה. |
| (5) ב+ג | (6) ב+ד    |       |            |

## המטריצה ההופכית

## שאלות

בשאלות 1-9 מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(1)} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(4)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(7)} \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה הבאה:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$  הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  איננה הפיכה?

הנח שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר  $n$ , וחלץ את  $X$ :

(12) א.  $AXC = D$  ב.  $A^{-1}XC = A^{-1}DC$  ג.  $P^{-1}X^T P = A$

(13) א.  $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$  ב.  $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14)  $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ .

חשב את  $X$ , אם ידוע כי  $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$ .

(16) נתון  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . חשב את  $Y$ , אם ידוע כי  $BYB^T = B^{-1} + B$ .

(17) נתון  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

חשב את  $B$ , אם נתון בנוסף כי:  $5A^T B(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2}$ .

(18) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^2 - 5A - 2I = 0$ .

הוכח כי  $A$  הפיכה ובטא את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

ב. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $(A-3I)(A+2I) = 0$ .

הוכח כי  $A$  הפיכה ובטא את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

(19) נתון כי:  $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ .

א. חשב את  $p(A)$ .

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכח ש- $A$  הפיכה, ובטא את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד.

(20) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^4 = 0$ .

א. הוכח כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה  $I - A$  הפיכה, ומצא את ההופכית שלה.

(21) נתון:  $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$ .

הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה  $D$ , כך ש- $D^{-1}AD = C$ .

\* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.  
 \*\* לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:  
 הוכח: אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$ , אז  $A$  דומה ל- $C$ .  
 (כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

**(22)** תהיינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ . הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- $AB = BA$ .
- אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.
- אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $A$  הפיכה.
- אם  $(AB)^{100} = I$ , אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .
- אם  $(AB)^{100} = 0$ , אז בהכרח  $(BA)^{101} = 0$ .

**(23)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , עבורן  $A^2 + AB = I$ .

- הוכיחו ש- $AB = BA$ .
- אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$  היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם  $B$  היא מטריצת האפס.

**(24)** תהיינה  $A, B$  מטריצות כלשהן.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

- אם  $AB = I$  או  $B = A^{-1}$ .
- אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה ריבועית, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה הפיכה, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- המכפלה  $AB$  לא הפיכה.
- אם  $A$  מטריצה ריבועית והמכפלה  $AB$  מוגדרת, אזי  $B$  מטריצה ריבועית.

**(25)** מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא אידמפוטנטית אם  $A^2 = A$ . הוכח:

- למעט המקרה בו  $A = I$ , מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
- אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
- אם  $A$  מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז  $tr(A) = 1$  או ש- $A$  מטריצה אלכסונית.
- $A$  אידמפוטנטית  $\Leftrightarrow A^n = A$ , לכל  $n$  טבעי.

**הערה:** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

## תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \lambda \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ב.}$$

$$A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.}$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.}$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{ב. הוכחה.} \quad (21)$$

$$\text{ג. הוכחה.} \quad (22)$$

$$\text{ד. הוכחה.} \quad (23)$$

$$\text{ה. הוכחה.} \quad (24)$$

$$\text{ו. הוכחה.} \quad (25)$$

## בחזרה למערכת משוואות ליניארית

### שאלות

(1) בסעיפים הבאים מצא מטריצות  $A$ , ו- $\underline{x}$  ו- $\underline{b}$ , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה  $A\underline{x} = \underline{b}$ :

$$\begin{array}{l}
 2x - 3y + z + t = 1 \\
 4x + y + 2z = 4 \\
 y + z + t = 1 \\
 x - 4z - 2y = 10
 \end{array}
 \quad \text{ב.}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2x + y - z = 3 \\
 x + 2y - 4z = 5 \\
 6x + 4y + z = 2
 \end{array}
 \quad \text{א.}$$

בשאלות 2-6 נתון כי:  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

בטא כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4) \qquad A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3) \qquad A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6) \qquad A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

(7) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

$$2x - y + z = 3$$

בעזרת המטריצה ההפוכה:  $3x - 2y + 2z = 5$ .

$$5x - 3y + 4z = 11$$

(8) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

(9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (2, -8, 4), \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

הוכח שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

**10** למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :  
 $(x, y, z) = (2, 3, 4)$  ,  $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$   
 מצא פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases} \quad \text{11 נתונה המערכת :}$$

מצא עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$ , למערכת :  
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

\* בפתרון השתמש במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$\text{12 נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

ידוע כי  $\text{rank}(A) = 3$ , וידוע כי למערכת  $Ax = b$  יש פתרון.  
 מצאו את הקבועים  $k, m$ .

**13** נתונה מטריצה ריבועית  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה 0.  
 הוכח ש- $A$  מטריצה לא הפיכה.

**14** נתונה מטריצה ריבועית הפיכה  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה  $k$ .  
 הוכח שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.  
 בטא קבוע זה בעזרת  $k$ .

$$\text{15 מטריצה } A \text{ מקיימת : } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

הוכיחו כי הווקטור  $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$  הוא פתרון של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

- 16** יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ . עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת  $(AB)x = 0$  קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח  $A$  לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת  $(AB)x = 0$ , אז למערכת  $(BA)x = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת  $Ax = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$ .
- ד. אם למערכת  $(A^t A)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז  $A$  לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$ , אז למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל  $\mathbb{R}$ :  $Ax = d$  ( $d \neq 0$ ). נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת  $\text{rank}(A) = 2$ . ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א.  $x = au + bv + cw$
- ב.  $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג.  $x = au + bv + w$
- ד.  $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה.  $x = (a + b)u - (av + bw + u)$ , כאשר  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:

בהינתן מערכת הומוגנית  $Ax = 0$ :

- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
- מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות. בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

## תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad \text{(2)}$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad \text{(3)}$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad \text{(4)}$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{(5)}$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad \text{(6)}$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad \text{(7)}$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad \text{(8)}$$

הוכחה. (9)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{(10)}$$

(11) אם  $k \neq 2$  או  $k \neq -1$ , אז יש פתרון אחד.

אם  $k = 2$ , אז יש אינסוף פתרונות.

אם  $k = -1$ , אז אין פתרונות.

$$m = 5, k = 9 \quad \text{(12)}$$

הוכחה. (13)

14) סכום האיברים בכל שורה של  $A^{-1}$  הוא קבוע השווה ל-  $\frac{1}{k}$ .

15) הוכחה.

16) הוכחה.

17) הוכחה.

## רגרסיה לינארית

### שאלות

1) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש :

$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49	124
69	95
89	71
99	45
109	18

- מצא את ישר הרגרסיה של הבעיה.
- בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא \$54.
- מה משמעות השיפוע של ישר הרגרסיה?
- מצא את סכום ריבועי השגיאות בחישוב הנ"ל (SSE).

הערה: הנח שהביקוש הוא ביחידות מוצר והמחיר הוא בדולרים.

### תשובות סופיות

- $f(x) = -1.7x + 211$
  - הביקוש הוא 119.2 יחידות מוצר.
  - העלאת מחיר המוצר ב-\$1 תביא לירידה במכירות של 1.7 יחידות מוצר בחודש.
  - $SSE = 207.65$