

מתמטיקה מורחב

פרק 40 - מטריצות

תוכן העניינים

1	1. מטריצות	1
3	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות	3
4	3. דרגה של מטריצה	4
7	4. מטריצה אלמנטרית	7
9	5. פירוק LU	9
10	6. תרגילי תיאוריה מתקדמים	10
12	7. המטריצה ההופכית	12
16	8. בחזרה למערכת משוואות ליניארית	16
21	9. רגרסיה ליניארית	21

מטריצות

שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.
קבע אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשום את סדר המטריצה:

- א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$
ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$
ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2 מצא את x, y, z , אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

3 א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4 $2tr(D^2 - 2E)$

5 א. $4C^T + A$ ב. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6 $I_2 BC$

7 $tr(C^T C)$

8 $DABC$

תשובות סופיות

- (1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא
- (2) א. 6×6 ב. 6×2 ח. לא. ט. 6×4 י. 6×6
- (3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$
- (4) 230 ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$
- (5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$
- (6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$ (7) 63 (8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

(1) ידוע ש- A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):

1. AA^T סימטרית.
2. $A + A^T$ סימטרית.
3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.

(2) ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית.
2. $A^2 - B^2$ סימטרית.
3. $A^2 + B$ סימטרית.

(3) ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית.
2. AB^2 סימטרית.
3. $(A - B)^2$ סימטרית.

(4) ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכח:

1. AB אנטי-סימטרית.
2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.

(5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.

הוכח כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

תשובות סופיות

(1) 1,2,3

(2) 2

(3) 1,2,3

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

דרגה של מטריצה

שאלות

(1) אמת את המשפט $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{על המטריצה:}$$

(2) אמת את המשפט $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{עבור:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} \quad \text{(3) נתונה המטריצה:}$$

חשב את $\text{rank}(A)$.

(4) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר $n > 1$.
הוכח או הפרך:

א. $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב. $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי A, B מטריצות ריבועיות מסדר $n > 1$.
הוכח או הפרך:

א. אם $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$, אז בהכרח B הפיכה.

ב. ייתכן ש- $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$.

ג. אם $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$, אז $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$.

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשב את $rank(A)$, $rank(B)$.

ב. חשב את $rank(B^{10}A^{14})$.

(7) נניח כי A, B שתי מטריצות ריבועיות מסדר n .

הוכיחו כי $rank \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2rank(A) + rank(B)$.

(8) תהי $A_{8 \times 7}$ מטריצה, כך ש- $rank(A) = 3$.

הוכח כי קיימות 3 מטריצות A_1, A_2, A_3 , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A = A_1 + A_2 + A_3$.

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר $m \times n$ שדרגתה k .

(9) נתונות שתי מטריצות $A_{3 \times 5}$, $B_{5 \times 3}$.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. $rank(AB) = rank(BA)$

ב. $rank(AB) \neq rank(BA)$

ג. המטריצה BA לא הפיכה.

תשובות סופיות

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) אם $k=1$, אז $\text{rank}(A)=2$. אם $k=4, k=10$, אז $\text{rank}(A)=3$.
- אם $\text{rank}(A)=4$ $k \neq 1,4,10$.
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה. ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א. $\text{rank}(A)=2$, $\text{rank}(B)=3$. ב. $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$.
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9) הוכחה.

מטריצה אלמנטרית

שאלות

(1) רשום את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(2) רשום את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(3) הוכח או הפרך כל אחד מסעיפים א-ד.
נתון כי A מטריצה ריבועית, ו- B מתקבלת מ- A ע"י סדרת פעולות דירוג.
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. A^2 מ- B^2 .

ב. BA מ- A^2 .

ג. BA מ- B^2 .

ד. AB מ- B^2 .

(4) תהי $A \in M_3[R]$, כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה $E_2 E_1 A$?

פתור בשתי דרכים:

דרך א' – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

דרך ב' – בעזרת כפל מטריצות.

תשובות סופיות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{e_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \cdot \quad (2)$$

$$\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e_8} = A$$

(3) הוכחה.

(4) -3

פירוק LU

שאלות

$$(1) \text{ רשום את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ רשום את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ רשום את פירוק LU של המטריצה } A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות

$$(1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$$

$$(2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$$

$$(3) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות

(1) תהיינה A, B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$.

- אזי בהכרח מתקיים: $AB = BA$.
- אם $A^2 - AB = I_n$ אז בהכרח B הפיכה.
- אם $(AB)^{100} = I$ אז בהכרח $(BA)^{100} = I$.
- אם $(AB)^{100} = 0$ אז בהכרח $(BA)^{101} = 0$.
- האף תשובה אינה נכונה.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

- תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, עבורן $A^2 + AB$ היא מטריצה היחידה. הוכיחו ש- $AB = BA$.
- אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$ היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

(3) תהיינה A, B מטריצות כלשהן. אזי בהכרח:

- אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
- אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
- אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.
- אם A, B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, וכן $rank(A) > rank(B)$, אזי $rank(AB) > rank(B)$.
- האף תשובה אינה נכונה.

(4) תהינה A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר $n \times n$, כך ש- $BA = AB$.
 א. אם A, B סימטריות הוכיחו כי AB^2 סימטרית.

ב. נניח כי $\text{rank} A = n-1$ ו- $v \neq 0$ הוא וקטור המקיים $Av = 0$,
 הוכח כי Bv הוא כפולה של v בסקלר.

(5) תהינה A, B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$.
 אזי בהכרח מתקיים:

א. $AB = BA$

ב. אם $A^2 - AB = I_n$ אז בהכרח $AB = BA$.

ג. אם $(AB)^{100} = I$ אז בהכרח $(BA)^{100} = I$.

ד. אם $(AB)^{100} = 0$ אז בהכרח $(BA)^{100} = 0$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(6) A מטריצה ריבועית, B מתקבלת מ- A ע"י סדרת פעולות דירוג (בשורות).
 ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א. B^2 מ- A^2 .

ב. BA מ- A^2 .

ג. B^2 מ- BA .

ד. B^2 מ- AB .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

תשובות סופיות

- | | | | |
|---------|------------|-------|------------|
| (1) ג+ד | (2) הוכחה. | (3) ה | (4) הוכחה. |
| (5) ב+ג | (6) ב+ד | | |

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות 1-9 מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(1)} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(4)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(7)} \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ איננה הפיכה?

הנח שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר n , וחלץ את X :

(12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^T P = A$

(13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14) $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשב את X , אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

(16) נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y , אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

(17) נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

חשב את B , אם נתון בנוסף כי: $5A^T B(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(18) ענה על הסעיפים הבאים :

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכח כי A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I) = 0$.

הוכח כי A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

(19) נתון כי: $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

א. חשב את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכח ש- A הפיכה, ובטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I - A$ הפיכה, ומצא את ההופכית שלה.

(21) נתון: $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$.

הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D , כך ש- $D^{-1}AD = C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.
 ** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:
 הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .
 (כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

(22) תהיינה A, B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n \geq 2$. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $AB = BA$.
 ב. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח B הפיכה.
 ג. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח A הפיכה.
 ד. אם $(AB)^{100} = I$, אז בהכרח $(BA)^{100} = I$.
 ה. אם $(AB)^{100} = 0$, אז בהכרח $(BA)^{101} = 0$.

(23) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, עבורן $A^2 + AB = I$.

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$.
 ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$ היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

(24) תהיינה A, B מטריצות כלשהן.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

- א. אם $AB = I$ אז $B = A^{-1}$.
 ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
 ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
 ד. המכפלה AB לא הפיכה.
 ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

(25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2 = A$. הוכח:

- א. למעט המקרה בו $A = I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
 ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
 ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז $tr(A) = 1$ או ש- A מטריצה אלכסונית.
 ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow A^n = A$, לכל n טבעי.

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \lambda \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ב.}$$

$$A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.}$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.}$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{ב. הוכחה.} \quad (21)$$

$$\text{ג. הוכחה.} \quad (22)$$

$$\text{ד. הוכחה.} \quad (23)$$

$$\text{ה. הוכחה.} \quad (24)$$

$$\text{ו. הוכחה.} \quad (25)$$

בחזרה למערכת משוואות ליניארית

שאלות

(1) בסעיפים הבאים מצא מטריצות A , ו- \underline{x} , ו- \underline{b} , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$\begin{array}{l}
 2x - 3y + z + t = 1 \\
 4x + y + 2z = 4 \\
 y + z + t = 1 \\
 x - 4z - 2y = 10
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{ב.} \\
 \text{א.}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2x + y - z = 3 \\
 x + 2y - 4z = 5 \\
 6x + 4y + z = 2
 \end{array}$$

בשאלות 2-6 נתון כי: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

בטא כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4) \qquad A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3) \qquad A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6) \qquad A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

(7) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

$$2x - y + z = 3$$

בעזרת המטריצה ההפוכה: $3x - 2y + 2z = 5$.

$$5x - 3y + 4z = 11$$

(8) פתור את מערכת המשוואות הבאה,

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

(9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (2, -8, 4), \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

הוכח שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

10 למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :
 $(x, y, z) = (2, 3, 4)$, $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$
 מצא פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases} \quad \text{11 נתונה המערכת :}$$

מצא עבור אילו ערכים של הקבוע k , למערכת :
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

* בפתרון השתמש במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$\text{12 נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

ידוע כי $rank(A) = 3$, וידוע כי למערכת $Ax = b$ יש פתרון.
 מצאו את הקבועים k, m .

13 נתונה מטריצה ריבועית A , המקיימת את התכונה הבאה :
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה 0.
 הוכח ש- A מטריצה לא הפיכה.

14 נתונה מטריצה ריבועית הפיכה A , המקיימת את התכונה הבאה :
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה A שווה k .
 הוכח שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.
 בטא קבוע זה בעזרת k .

$$\text{15 מטריצה } A \text{ מקיימת : } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

הוכיחו כי הווקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.

- 16** יהיו A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$. עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת $(AB)x = 0$ קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח A לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת $(AB)x = 0$, אז למערכת $(BA)x = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת $Ax = 0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$.
- ד. אם למערכת $(A^t A)x = 0$ קיים פתרון יחיד, אז A לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית $(AB)x = 0$, אז למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל \mathbb{R} : $Ax = d$ ($d \neq 0$). נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת $\text{rank}(A) = 2$. ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א. $x = au + bv + cw$
- ב. $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג. $x = au + bv + w$
- ד. $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה. $x = (a + b)u - (av + bw + u)$, כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$.

הערה: בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:

בהינתן מערכת הומוגנית $Ax = 0$:

- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
- מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות. בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad \text{(2)}$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad \text{(3)}$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad \text{(4)}$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{(5)}$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad \text{(6)}$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad \text{(7)}$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad \text{(8)}$$

הוכחה. (9)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{(10)}$$

(11) אם $k \neq 2$ או $k \neq -1$, אז יש פתרון אחד.

אם $k = 2$, אז יש אינסוף פתרונות.

אם $k = -1$, אז אין פתרונות.

$$m = 5, k = 9 \quad \text{(12)}$$

הוכחה. (13)

14) סכום האיברים בכל שורה של A^{-1} הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$.

15) הוכחה.

16) הוכחה.

17) הוכחה.

רגרסיה לינארית

שאלות

1) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש :

$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49	124
69	95
89	71
99	45
109	18

- מצא את ישר הרגרסיה של הבעיה.
- בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא \$54.
- מה משמעות השיפוע של ישר הרגרסיה?
- מצא את סכום ריבועי השגיאות בחישוב הנ"ל (SSE).

הערה: הנח שהביקוש הוא ביחידות מוצר והמחיר הוא בדולרים.

תשובות סופיות

- $f(x) = -1.7x + 211$
 - הביקוש הוא 119.2 יחידות מוצר.
 - העלאת מחיר המוצר ב-\$1 תביא לירידה במכירות של 1.7 יחידות מוצר בחודש.
 - $SSE = 207.65$