

שדות אלקטרומגנטיים 141035

פרק 4 - מציאת התפלגות מטען

תוכן העניינים

1. מציאת התפלגות מטען
2. משוואת פואסון ולפלס

מציאת התפלגות מטען:

שאלות:

(1) מציאת צפיפות נפחית משטחית קווית ונקודתית

נתונה פונקציית הפוטנציאל הבאה במרחב (בקואורדינטות גליליות):

$$\varphi \begin{cases} Ar^2 & r < a \\ B \ln(r) + C & a < r < b \\ D \ln(r) & b < r \end{cases}$$

A, B, C, D נתונים.

א. מצא קשר בין הקבועים.

ב. מצא את התפלגות המטען במרחב, כעת נתון כי עוטפים את כל המערכת

בגליל אינסופי מוליך מוארק ברדיוס $c > b$.

ג. מצא את פונקציית הפוטנציאל החדשה בכל המרחב.

(2) שדה התלוי בזווית

השדה החשמלי במרחב נתון ע"י הפונקציה הבאה בקואורדינטות כדוריות:

$$\vec{E} = \frac{C}{r} (\hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \hat{\phi})$$

א. מצא את צפיפות המטען במרחב.

ב. מצא את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י אינטגרל על

צפיפות המטען.

ג. מצא שוב את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י חישוב של

השטף של השדה החשמלי ושימוש בחוק גאוס.

תשובות סופיות:

(1) ראה סרטון.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 c}{r^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} + \frac{\sin \theta \cos 2\varphi}{\sin \varphi} \right) \quad \text{א.} \quad (2)$$

ב. $4\pi\varepsilon_0 cR$ ג. $4\pi\varepsilon_0 cR$

משוואת פואסון ולפּלס:

סיכום כללי:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} : \text{משוואת פואסון}$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = 0 : \text{משוואת לפּלס}$$

הלפּלאסיאן של פונקציה סקלרית f כתלות בקואורדינטות קרטזיות:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

גליליות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

כדוריות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

כאשר φ היא הזווית עם ציר z לפעמים מסמנים את הלפּלאסיאן גם ב- Δf .

שאלות:

(1) דוגמה – שתי קליפות

- נתונות שתי קליפות כדוריות בעלות מרכז משותף ברדיוסים a ו- b ($a < b$). נתון כי הקליפה הפנימית מוארקת והחיצונית מוחזקת בפוטנציאל V .
- רשמו את משוואת לפּלס לכל תחום.
 - פתרו את המשוואה, השתמשו בתנאי השפה ומצאו את הפוטנציאל בכל תחום.
 - מהי התפלגות המטען על הקליפה המוארקת?

תשובות:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ -\frac{abV}{r(b-a)} + \frac{bV}{b-a} & a < r < b \\ \frac{bV}{r} & b < r \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{ג.} \quad \sigma(a) = \frac{-\epsilon_0 bV}{a(b-a)}$$