

# applied calculus for data science

פרק 12 - מציאת מספר הפתרונות של משוואה (משפטי קושי ורול)

תוכן העניינים

1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה..... 1
2. משפט רול..... 3

## מציאת מספר הפתרונות של משוואה

### שאלות

הוכח שלמשוואות בשאלות 1-3 יש בדיוק פתרון אחד:

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (3)$$

(4) נתונה המשוואה  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ונתון כי  $b^2 < 3ac$ . מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכח את תשובתך.

עבור כל אחת מהמשוואות 5-6, מצא את מספר הפתרונות ופתור אותה:

$$e^{x-1} = x \quad (5)$$

$$\ln(x+5) - 4 = x \quad (6)$$

הוכח שלמשוואות בשאלות 7-9 יש בדיוק שני פתרונות:

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (9) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (8) \quad e^x - 5x = 0 \quad (7)$$

בכל אחת מהמשוואות 10-12, מצא קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הנח שכל הפרמטרים שונים מאפס):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (10)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (11)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (12)$$

**תשובות סופיות**

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) פתרון יחיד.

(5)  $x=1$ (6)  $x=-4$ 

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $b^2 - 4ac = 0$ (11)  $4b^2 - 12ac < 0$ (12)  $b^2 (n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0$

## משפט רול

- (1) בדוק האם הפונקציה הנתונה,  $f(x)$  בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצא את כל ערכי  $c$  המקיימים את מסקנת משפט רול:

א.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$   $[0, 2]$

ב.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$   $[-1, 1]$

(2) נתון ש-  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ .

- הראה ש-  $f(1) = f(5)$ , אך אין נקודה  $c$ , כך ש-  $f'(c) = 0$ .  
 האם הדבר סותר את משפט רול? נמק.

- (3) הוכח שלמשוואה  $x^2 + x^3 + 5x = 1$  יש לפחות פתרון אחד, ולכל היותר פתרון אחד.

- (4) נתון כי  $f$  גזירה פעמיים.  
 נתון כי  $f$  פונקציה זוגית שיש לה מינימום מקומי בנקודה  $x_0 = 2$ .  
 הוכח כי יש שתי נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

## תשובות סופיות

- (1) א. כן,  $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . ב. כן,  $2 - \sqrt{3}$ .
- (2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה  $x = 3$ .
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.