

# אלגברה ליניארית : ידה ידה ידה - בלה בלה בלה

פרק 6 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

1. וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס .....
2. תרגילי תיאוריה מתקדמים .....
- 3 .....

## וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

(1) נתונים שני בסיסים של  $R^3$  :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_1$ .

סמן וקטור זה ב-  $[v]_{B_1}$ .

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_2$ .

סמן וקטור זה ב-  $[v]_{B_2}$ .

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס  $B_1$  לבסיס  $B_2$ .

סמן מטריצה זו ב-  $[M]_{B_1}^{B_2}$ .

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס  $B_2$  לבסיס  $B_1$ .

סמן מטריצה זו ב-  $[M]_{B_2}^{B_1}$ .

ה. אשר את הטענות הבאות:

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left( [M]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1}$$

(2) נתונים שני בסיסים של  $P_2[R]$  :

$$B_1 = \{1+x, x, x+x^2\}, \quad B_2 = \{1+x^2, x+x^2, x^2\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_1$ .

סמן וקטור זה ב-  $[v]_{B_1}$ .

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_2$ .

סמן וקטור זה ב-  $[v]_{B_2}$ .

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס  $B_1$  לבסיס  $B_2$ .

סמן מטריצה זו ב-  $[M]_{B_1}^{B_2}$ .

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3) \quad \text{נתונים שני בסיסים של } M_2[R]$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B$ .

סמן וקטור זה ב- $[v]_B$ .

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $E$ .

סמן וקטור זה ב- $[v]_E$ .

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס  $B$  לבסיס  $E$ .

סמן מטריצה זו ב- $[M]_B^E$ .

(4) יהי  $V$  מרחב וקטורי ויהי  $B$  בסיס של  $V$ .

הוכח כי הווקטורים  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  בת"ל,

אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות שלהם,

לפי הבסיס  $B$ ,  $\{[u_1], [u_2], \dots, [u_m]\}$ , הם בת"ל.

הסבר כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

### תשובות סופיות

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \quad (x, y, z-x-y) \quad \text{ב.} \quad (x, y-x-z, z) \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$[M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ד.} \quad \text{ה. הוכחה.}$$

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \quad (a, b, c-a-b) \quad \text{ב.} \quad (a, b-a-c, c) \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \quad (x, y, z, t) \quad \text{ב.} \quad (x, y-x, z-y+x, t-z+y-x) \quad \text{א.} \quad (3)$$

(4) שאלת הוכחה.

## תרגילי תיאוריה מתקדמים

### שאלות הוכחה

- (1) יהי  $V$  מרחב, ותהי  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  קבוצה;  $b \in V$ .  
הוכיחו כי:  $b \in sp(A) \Leftrightarrow sp(A \cup \{b\}) = sp(A)$ .
- (2) יהיו  $u, v, w$  וקטורים, כך ש-  $\{u, v\}$  בלתי-תלויה ליניארית ו-  $u \in sp(\{v, w\})$ .  
א. הוכיחו ש-  $w \in sp(\{u, v\})$ .  
ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף  $z$ , הקבוצה  $\{u, w, z\}$  בלתי-תלויה ליניארית.  
הוכיחו שגם הקבוצה  $\{u, v, z\}$  בלתי-תלויה ליניארית.
- (3) יהי  $U$  מרחב, תהי  $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq U$  ויהי  $u \in U$  וקטור כלשהו.  
הוכח כי אם  $u \in sp(A)$ , וכן  $u \notin sp(A - \{u_n\})$ , אז  $u_n \in sp(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u)$ .
- (4) יהי  $V$  מרחב,  $b \in V$  ו-  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$  בלתי-תלויה ליניארית.  
הוכיחו כי  $A \cup \{b\} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, b\}$  בת"ל  $\Leftrightarrow b \in sp(A)$ .
- (5) יהי  $V$  מרחב  $n$  מימדי, תהי  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$  ויהי  $b \in sp(A)$ .  
למשוואה  $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = b$  אין פתרון יחיד.  
הוכח או הפרך:  
א.  $k \geq n$ .  
ב.  $A$  פורשת את  $V$ .  
ג.  $A$  בהכרח תלויה ליניארית.
- (6) יהי  $V$  מרחב,  $b \in V$  ו-  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$  בלתי-תלויה ליניארית.  
הוכח או הפרך:  
א. אם  $b \notin sp(A)$ , אז הקבוצה  $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$  היא בת"ל.  
ב. אם  $b \in sp(A)$ , אז הקבוצה  $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$  היא בת"ל.  
ג. אם  $b \in sp(A)$ , אז הקבוצה  $B = \{v_1 + b, v_2 + b, \dots, v_n + b\}$  היא ת"ל.

- (7) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$ , ויהיו  $v_1, v_2, v_3 \in V$ .  
 נסמן:  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $T = \{av_1 + v_2 + v_3, v_1 + av_2 + v_3, v_1 + v_2, av_3\}$ .  
 הוכח או הפרך:  
 א.  $spS \subseteq spT$ .  
 ב. אם  $S$  בלתי תלויה ליניארית ואם  $a \neq -2, 1$ , אז בהכרח  $sp(T) = sp(S)$ .  
 ג.  $\dim(spT) \leq 2$ .  
 ד.  $\dim(sp(T)) = \dim(sp(S))$ .
- (8) יהי  $V$  מרחב ותהיינה  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ,  $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  קבוצות וקטורים ב- $V$ .  
 הוכח או הפרך:  
 א.  $sp(A \cup B) = sp(A) + sp(B)$ .  
 ב. אם  $A \cup B$  בת"ל, אז  $A, B$  שתיהן בת"ל.  
 ג. אם  $\dim V = m + k$  וגם  $A, B$  שתיהן בת"ל, אז  $A \cup B$  בת"ל.  
 ד. אם  $A \cup B$  בת"ל, אז  $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$ .
- (9) יהי  $V$  מרחב ויהיו  $U, W \subseteq V$  תמריים.  
 תהיינה  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq U$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  שתי קבוצות בת"ל.  
 הוכח כי אם  $U \cap W = \{0\}$ , אז  $A \cup B$  בת"ל.
- (10) יהי  $V$  מרחב ויהיו  $U, W$  תמריים שלו.  
 הוכח כי  $U \cup W$  מרחב  $\Leftrightarrow W \subseteq U$  או  $U \subseteq W$ .

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## שאלות אמריקאיות

11) תהינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ .  
 אז בהכרח מתקיים:

- מרחב השורות של  $A^2$  מוכל במרחב השורות של  $A$ .
- אם  $AB$  משולשית עליונה, אז בהכרח  $A$  משולשית עליונה או  $B$  משולשית עליונה.
- אם  $AB = 0$ , אז בהכרח  $B = 0$  או  $A = 0$ .
- אף תשובה אינה נכונה.

$$(12) \text{ נסמן } W = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}, U = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}$$

שני תת-מרחבים של  $\mathbb{R}^3$ .  
 אזי בהכרח מתקיים:

- $U = W$
- $\dim U = \dim W$
- $U \subseteq W$
- אם  $U + W = \mathbb{R}^3$ , אז  $U \cap W = \{0\}$ .
- אף תשובה אינה נכונה.

13) תהי  $A$  קבוצה בת 6 פולינומים במרחב  $\mathbb{R}_5[x]$  מעל  $\mathbb{R}$  (מרחב הפולינומים

ממעלה עד וכולל 5), ונגיח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x] = Sp(A)$ .  
 אזי בהכרח מתקיים:

- ייתכן ש- $A$  מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
- ייתכן ש- $A$  מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
- שני תת-מרחבים של  $\mathbb{R}_5[x]$  מאותו מימד בהכרח שווים.
- $A$  תלויה ליניארית.
- אף תשובה אינה נכונה.

14) במרחב וקטורי  $\mathbb{R}^2$  מעל שדה  $\mathbb{R}$ ,

תהי  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ- $\mathbb{R}^2$ .

אז מטריצה  $P$  המקיימת  $[v]_A = Pv$  לכל  $v \in \mathbb{R}^2$ , שווה ל:

א.  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

ב.  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ג.  $P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ד.  $P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

15) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$ , ותהיינה  $A, B$  קבוצות שונות לא ריקות

וזרות של וקטורים מ- $V$ . אז בהכרח מתקיים:

א. אם  $A \cup B$  בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח  $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$ .

ב. אם  $A \cup B$  תלויה לינארית,

אז בהכרח  $A$  תלויה לינארית או  $B$  תלויה לינארית.

ג. אם  $A, B$  בלתי תלויות לינאריות, אז בהכרח  $A \cup B$  בלתי תלויה לינארית.

ד. אם  $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$ , אז בהכרח  $A \cup B$  תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

16) אם  $W$  תת מרחב של מרחב וקטורי  $V$ , אז:

א. כל בסיס של  $V$  מכיל בסיס כלשהו של  $W$ , וכל בסיס של  $W$  מוכל בבסיס כלשהו של  $V$ .

ב. כל בסיס של  $V$  מכיל בסיס כלשהו של  $W$ , אבל לא כל בסיס של  $W$  מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של  $V$ .

ג. לא כל בסיס של  $V$  מכיל בהכרח בסיס כלשהו של  $W$ , אבל כל בסיס של  $W$  מוכל בבסיס כלשהו של  $V$ .

ד. אף תשובה אינה נכונה.

17) יהיו  $U, W$  שני תתי-מרחבים של מרחב  $V$ ,

כך ש-  $\dim V = n, \dim U = \dim W = n - 1$ .

אז:

א.  $n - 2 \leq \dim(U \cap W)$

ב. אם  $U \neq W$ , ייתכן ש-  $U \subset W$ .

ג. קיים  $v \in V$ , כך ש-  $V = U + \text{sp}\{v\}$  ו-  $U \cap \text{sp}\{v\} = \{0\}$ .

ד. אם  $U + \text{sp}\{v\} = V$  ו-  $U \cap \text{sp}\{v\} = \{0\}$ , אז  $v \in W$ .

18) נניח כי  $v_1, v_2, v_3, v_4$  הם וקטורים במרחב ליניארי  $V$ .

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $\text{Span}\{v_1, v_2\} \cap \text{Span}\{v_3, v_4\}$  והווקטורים  $v_1, v_2, v_3, v_4$  שונים זה מזה,

אז הווקטורים  $v_1 - v_2$  ו-  $v_3 - v_4$  הם בת"ל.

ב. אם  $v_1, v_2$  בת"ל וגם  $v_3, v_4$  בת"ל, וכן  $\text{Span}\{v_1, v_2\} \cap \text{Span}\{v_3, v_4\} = \{0\}$ ,

אז  $v_1, v_2, v_3, v_4$  הם בת"ל.

19) אם  $V, W$  תת מרחבים של מרחב וקטורי  $U$ , ומתקיים:

$$\dim U = 6, \dim V = 5, \dim W = 3$$

אז  $\dim(V \cap W)$  יכול להיות:

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3

ה. 4

ו. 5

20)  $V, W$  תת-מרחבים ממימד 3 של  $\mathbb{R}^7$ ,  $\{w_1, w_2, w_3\}$  בסיס של  $W$  ו-  $\{v_1, v_2, v_3\}$

בסיס של  $V$ , אז:

א.  $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$  בלתי תלוי לינארית.

ב.  $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3\}$  פורשת את  $V + W$ .

ג.  $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$  בת"ל.

ד.  $\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$  פורשת את  $V + W$ .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(21) אם  $A$  מטריצה לא ריבועית, אז בהכרח:

- מרחב השורות של  $A^t$  שווה למרחב השורות של  $A$ .
- מרחב השורות של  $A^t$  שונה ממרחב השורות של  $A$ .
- ממד מרחב השורות של  $A^t$  שווה לממד מרחב השורות של  $A$ .
- ממד מרחב השורות של  $A^t$  שונה מממד מרחב השורות של  $A$ .
- אף תשובה אינה נכונה.

(22) תהינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ .

אזי בהכרח מתקיים:

- מרחב השורות של  $AB$  מוכל במרחב השורות של  $A$ .
- אם  $AB = 0$ , אז בהכרח  $B = 0$  או  $A = 0$ .
- אם  $AB$  משולשית עליונה, אז בהכרח  $A$  משולשית עליונה או  $B$  משולשית עליונה.
- אם  $AB = 2I_n$ , אז בהכרח  $BA = 2I_n$ .
- אף תשובה אינה נכונה.

(23) תהי  $A$  קבוצה בת 6 פולינומים במרחב  $\mathbb{R}_5[x]$  מעל  $\mathbb{R}$  (מרחב הפולינומים

ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש- $Sp(A) = \mathbb{R}_5[x]$ .

אזי בהכרח מתקיים:

- ייתכן ש- $A$  מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.
- ייתכן ש- $A$  מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.
- שני תת-מרחבים של  $\mathbb{R}_5[x]$  מאותו מימד בהכרח שווים.
- $A$  בלתי תלויה לינארית.
- אף תשובה אינה נכונה.

$$(24) \text{ יהי } a \text{ מספר ממשי ויהיו } U = Sp \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right\}, W = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שני תתי-מרחבים של  $\mathbb{R}^4$ . בהכרח מתקיים:

- $U \cap W = \{0\}$  לכל ערכי  $a$ .
- $U \cap W \neq \{0\}$  לכל ערכי  $a$ .
- $\dim(U \cap W) = 3$  לכל ערכי  $a \neq \pm 1$ .
- $\dim(U \cap W) = 1$  לכל ערכי  $a \neq \pm 1$ .
- אף תשובה אינה נכונה.

$$(25) \text{ נתונות המטריצות } T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

אז בהכרח מתקיים:

א.  $\text{rank}(T) = 1, \text{rank}(R) = 2$

ב.  $\text{rank}(R^3 T^5) = 1$

ג. מרחב השורות של  $R^3 T^5$  שווה למרחב השורות של  $T^5$ .

ד.  $T^{100} = 0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(26) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$ , ותהי  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  קבוצה של וקטורים

מ- $V$  ( $1 \leq n$ ). נניח בנוסף ש- $\dim(V) = n$ . אזי בהכרח מתקיים:

א. אם  $A$  בלתי תלויה לינארית, אז  $A$  פורשת את  $V$ .

ב. אם  $A$  קבוצה פורשת ל- $V$ , אז  $A$  בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם  $A$  פורשת את  $V$ , אך  $A$  תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם  $A$  בלתי תלויה לינארית, אך  $A$  אינה פורשת את  $V$ .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(27) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $F$ , ותהיינה  $A, B$  קבוצות שונות לא ריקות של

וקטורים מ- $V$ . אז בהכרח מתקיים:

א. אם  $A \cup B$  בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח  $sp(A) \cap sp(B) = \{0\}$ .

ב. אם  $A, B$  תלויות לינאריות, אז בהכרח  $A \cap B$  תלויה לינארית.

ג. אם  $A, B$  בלתי תלויות לינאריות, אז בהכרח  $A \cup B$  בלתי תלויה לינארית.

ד. אם  $sp(A) \cup sp(B) = sp(A \cup B)$ , אז בהכרח  $A \cup B$  תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(28) וקטור הקואורדינטות של הפולינום  $2x^3 + 12x^2 - x + 11$ ,

ביחס לבסיס  $\{2x^3 + 3x^2 + 2, x + 1, x^3 + x^2, 2x^2 + 2\}$ , הוא:

א.  $(2, 2, -2, 4)$

ב.  $(4, -2, -1, 2)$

ג.  $(2, -1, -2, 4)$

ד.  $(4, -1, 2, 2)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(29) תהי  $A$  מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:

- אם שורות  $A$  בת"ל, אזי עמודות  $A$  בת"ל.
- אם שורות  $A$  בת"ל ועמודות  $A$  בת"ל, אזי בהכרח  $A$  מטריצה ריבועית.
- אם שורות  $A$  בת"ל ועמודות  $A$  בת"ל, אזי בהכרח  $A$  מטריצה הפיכה.
- אם שורות  $A$  בת"ל, אזי בהכרח למערכת  $Ax=0$  יש פתרון יחיד.
- אף תשובה אינה נכונה.

(30) נתונים תת-מרחבים של  $\mathbb{R}^4$  מעל  $\mathbb{R}$ :

$$U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b+c=d\}$$

$$W = sp\{(1,0,1,1), (0,2,1,0), (0,1,1,1), (1,1,1,0)\}$$

- מצאו בסיס וממד עבור  $U, W, U \cap W$ .
- עבור תת מרחבים  $K, L$  של מרחב וקטורי  $V$ , הגדירו את  $K+L$ .

(31)  $A$  מטריצה לא ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית  $Ax=0$  פתרון יחיד, אז:

- יש מערכת לא הומוגנית  $Ax=b$  ללא פתרון.
- יש מערכת לא הומוגנית  $Ax=b$  עם יותר מפתרון אחד.
- יש מערכת לא הומוגנית  $A^t y=c$  ללא פתרון.
- יש מערכת לא הומוגנית  $A^t y=c$  עם יותר מפתרון אחד.
- אף תשובה אינה נכונה.

(32) תהי  $A$  מטריצה ממשית לא ריבועית מסדר  $m \times n$ . אזי בהכרח מתקיים:

- אם למערכת  $Ax=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ , אז בהכרח  $m < n$ .
- ייתכן ש-  $A^t A = I_m$  וגם  $AA^t = I_n$ .
- אם  $rank(A) = m$ , אז למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  יש אינסוף פתרונות.
- אם למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח  $m < n$ .
- אף תשובה אינה נכונה.

(33) נתונות מטריצות ממשיות  $A$  מסדר  $2 \times 4$  ו-  $B$  מסדר  $4 \times 4$ ,

$$\text{כך ש- } rank(A) = 2, \quad rank(B) = 3.$$

הוכיחו כי  $AB \neq 0$ .

- 34** תהי  $A$  מטריצה ממשית מגודל  $m \times n$ , כאשר  $m < n$ .  
 נסמן ב- $A^T$  את המטריצה המוחלפת. בהכרח ש:  
 א. מימד מרחב הפתרונות של המערכת  $AX = 0$  הוא  $n - m$ .  
 ב. למערכת  $(A^T A)x = 0$  יש אינסוף פתרונות.  
 ג. ייתכן מצב בו למערכת  $(A^T A)x = 0$  יש פתרון יחיד.  
 ד. ייתכן מצב בו למערכת  $(AA^T)x = 0$  יש פתרון יחיד.  
 ה. אף תשובה אינה נכונה.

- 35**  $A$  מטריצה  $3 \times 3$ , כך ש- $A^2 = 0$  אבל  $A \neq 0$ , אז הדרגה של  $A$  יכולה להיות:  
 א. 0  
 ב. 1  
 ג. 2  
 ד. 3  
 ה. אף תשובה אינה נכונה.

- 36** תהיינה  $A$  מטריצה מסדר  $3 \times 5$  ו- $B$  מטריצה  $5 \times 3$  אז:  
 א.  $AB$  הפיכה אם ורק אם  $BA$  הפיכה.  
 ב.  $AB$  בהכרח לא הפיכה.  
 ג.  $BA$  בהכרח הפיכה.  
 ד. אם  $AB = 0$ , אז  $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 5$ .

- 37** אם  $A$  מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A$  פתרון יחיד, אז בהכרח:  
 א.  $A$  הפיכה.  
 ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A'$  פתרון יחיד.  
 ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A$  פתרון יחיד.  
 ד. מרחב העמודות של  $A$  שונה ממרחב הפתרונות של  $A$ .

- 38** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $m \times n$ , אזי בהכרח מתקיים:  
 א. עבור  $m = n$ , אם למערכת  $Ax = b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ , אז בהכרח למערכת  $A^T x = b$ , יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .  
 ב. אם למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח  $m < n$ .  
 ג. ייתכן ש- $A^T A = I_n$  וגם  $AA^T = I_m$ .  
 ד. אף תשובה אינה נכונה.

$$(39) \text{ נתון כי } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \text{ הפיכה.}$$

אז בהכרח:

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

א. למערכת  $\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23}$  פתרון יחיד.

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

ב. למערכת  $\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1$  אינסוף פתרונות.

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

ג. למערכת  $\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1$  אין פתרון.

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

ד. אף תשובה אינה נכונה.

### תשובות סופיות

(11) א	(12) ב	(13) א	(14) ד
(15) א+ד	(16) ג	(17) א+ג	(18) הוכחה.
(19) ד+ג	(20) ב	(21) ב+ג	(22) ד
(23) ה	(24) ד+ב	(25) ב+ג	(26) א+ב
(27) א	(28) ג	(29) ג	

$$B_U = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$$

$$B_W = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$$

$$U \cap W = \text{sp}\{(1, 0, 2), (0, 1, 2)\}$$

$$\dim U = 3, \quad \dim W = 3, \quad \dim(U \cap W) = 2$$

$$(31) \text{ ד} \quad (32) \text{ א+ב+ג} \quad (33) \text{ הוכחה.}$$

$$(34) \text{ ד+ב} \quad (35) \text{ ב} \quad (36) \text{ ד}$$

$$(37) \text{ ד} \quad (38) \text{ א+ג} \quad (39) \text{ ב}$$