אלגברה 1 מ

פרק 8 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R.

$M_n\left[R\right]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n\left[R\right]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F\left[R\right]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $\left(f:R\to R\right)$ מעל השדה R.

שאלות

בשאלות **1-7** בדוק האם W תת-מרחב של R^3:

1) $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$

2) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$

3) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$

4) $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$

5) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$

6) $W=\{(a,b,c)\,|\,c-b=b-a\}$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

7) $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות **15-8** בדוק האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A|\ A=A^T\}$.

9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B.
כלומר, $W=\{A|\ AB=BA\}$.

10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W=\{A|\ |A|=0\}$.

11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A|\ A^2=A\}$.

12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס.
כלומר, $W=\{A|\ AB=0\}$.

14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A|\ tr(A)=0\}$.

15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **21-16** בדוק האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x)|\ p(4)=0\}$.

17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4.
כלומר, $W=\{p(x)|\deg(p)\leq 4\}$.

19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n, כאשר $4\leq n\leq 7$.

21) $W=\{p(x)|\ p(0)=1\}$

בשאלות **30-22** בדוק האם W הוא תת-מרחב של $F[R]$:

22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\}$.

23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid |f(x)|\le M\}$.

24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

27) $W=\left\{f(x)\mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

28) $W=\{f(x)\mid f'(x)=0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

29) $W=\{f(x)\mid f'(x)=1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

30) $W=\{f(x)\mid f(x)=f(x+1)\}$

31) בדוק האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של C^3 :

א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.

ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

32) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

א. מצא וקטור b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.

ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?

ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5 ?

33) יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F.

א. מצאו תנאי על k, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של V.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V, שפורשים את W.

הערה: לפתרון סעיף זה עבור קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

תשובות סופיות

1) כן	2) כן	3) כן	4) לא	5) לא
6) כן	7) לא	8) כן	9) כן	10) לא
11) לא	12) כן	13) כן	14) כן	15) כן
16) כן	17) לא	18) כן	19) כן	20) לא
21) לא	22) כן	23) כן	24) כן	25) כן
26) כן	27) לא	28) כן	29) לא	30) כן

31) א. כן ב. לא

32) א. $u=(1,0,0,0,0)$ ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$
ג. לא.

33) א. $k=0$ ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3, 6x-7x^2+x^4\}$

צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$u_1=(4,1,1,5),\ \ u_2=(0,11,-5,3),\ \ u_3=(2,-5,3,1),\ \ u_4=(1,3,-1,2)$

1) א. האם u_1 הוא צירוף ליניארי של u_4?
ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

2) א. האם u_3 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?
במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

3) א. האם u_4 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?
במידה וכן, רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

4) נתון $v=(4,12,k,-2k)$.
א. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

5) נתון $v=(a,b,c,d)$.
א. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

6) הבע את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף ליניארי של u_1, u_2 ו-u_3.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הבע את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף ליניארי של u_1, u_2, u_3 ו-u_4.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4&1\\1&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&11\\-5&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&-5\\3&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}$$

א. בדוק האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.
ב. במידה והמטריצות תלויות, רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף ליניארי של יתר המטריצות.
ג. האם המטריצה A שייכת ל-$Sp\{B,C\}$?

9) נתונים הפולינומים הבאים: $p_1(x)=4+x+x^2+5x^3$, $p_2(x)=11x-5x^2+3x^3$, $p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3$, $P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3$.
א. בדוק האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.
ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשום כל פולינום כצירוף ליניארי של שאר הפולינומים.
ג. האם הפולינום p_2 שייך ל-$Sp\{p_1,p_4\}$?

10) עבור איזה ערכים של a,b,c, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:
$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$

בשאלות **11-13** נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב-$V[F]$.
בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשום כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

11) $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

12) $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

13) $\{u+v,v+w,w\}$

בשאלות **15-14** בדוק האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- C^3:

14) מעל $\mathbb{C}$.

15) מעל $\mathbb{R}$.

16) נתבונן ב- $V=R$ כמרחב וקטורי מעל השדה Q.
הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R, כשהוא מרחב וקטורי מעל Q.

17) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1,A_2,...A_n$.
הוכיחו את הטענה הבאה:
למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in span\{A_1,A_2,...,A_n\}$.

18) לפניכם 3 תת-קבוצות של R^4:

$U=span\{(1,2,2,1),(1,1,-1,-1),(0,0,1,1)\}$
$W=span\{(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\}$
$V=span\{(2,3,1,0),(1,2,1,0),(1,4,3,1)\}$

א. א. האם $U=W$?
ב. ב. האם $U=V$?

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = u_1 - 2u_3,\ \ u_1 = 2u_3 + u_2$.

3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_2 = 4u_4 - u_1,\ \ u_1 = 4u_4 - u_2$.

4) א+ב+ג. $k = -4$

5) $a = 5t + 3s,\ b = 4t - 13s,\ c = 7s,\ d = 7t$

6) $v = 2u_1 + u_2 + u_3$, אינסוף.

7) $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$, אינסוף.

8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$

ב. $A = B + 2C,\quad B = A - 2C,\quad C = 0.5A - 0.5B,\quad D = 0.25A + 0.25B$

9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$

ב. $p_1 = p_2 + 2p_3,\ \ p_2 = p_1 - 2p_3,\ \ p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2,\ \ p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2$

10) לכל ערך של a, b, c.

11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ \ y = 0.5x + 0.5z,\ \ x = 2y - z$.

12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $z = 2y - x,\ \ y = 0.5x + 0.5z,\ \ x = 2y - z$.

13) בלתי תלויים ליניארית.

14) תלויים.

15) בלתי תלויים ליניארית.

16) הוכחה.

17) הוכחה.

18) א. כן. ב. לא.

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

1) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

2) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

3) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

4) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצא קבוצה T', שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה ליניארית ב- T.

ג. השלם את T' לבסיס של R^3.

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

5) לפניך 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

.1 $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ .2 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ .3 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצא בסיס וממד ל- W, U ו- V.

6) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

7) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

8) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

9) נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

10) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \;\middle|\; A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

11) נתון $U=\left\{p(x)\in P_3[R] \;\middle|\; p(1)=0\right\}$.
מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

12) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U.

ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V.

13) לפניכם תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצא בסיס וממד ל- U.

14) לפניכם תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות **16-15** מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציין את דרגת המטריצה (rank) :

15)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

16)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
2) א. לא. ב. לא. ג. כן.
3) א. לא. ב. לא. ג. כן.
4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$
5) א. W - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.
U - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.
V - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.
6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.
7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.
8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.
9) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3.
10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 0.
11) בסיס: $\{(p_1(x)=-1+x^3,\ \ p_2(x)=-1+x^2,\ \ p_3(x)=-1+x)\}$, ממד: 3.
12) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.
ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.
13) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.
14) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.
15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.
מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.
16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.
מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.

חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מחבים

שאלות

1) לפניך 3 מערכות של משוואות ליניאריות הומוגניות:

$$1)\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$$

נסמן ב- V, U, W את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 2,1 ו-3 בהתאמה.

א. מצא בסיס וממד ל- U, W ו- V.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

2) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב R^4:

$$U=sp\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V=sp\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U.
ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.
ד. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$ (פתור בשתי דרכים שונות).
ה. האם $U+V=R^4$?
ו. האם $U\oplus V=R^4$?

3) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x-x^2+2x^3, 3-x+7x^2+4x^3, -5+3x-15x^2-6x^3\}$$

$$V=sp\{1-x+x^2+x^3, 1+2x^2-x^3, 1+x+3x^2-3x^3, 5+x+5x^2+8x^3\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

4) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x+x^3, 1+2x+x^2+2x^3, -1+2x+3x^2+2x^3\}$$

$$V=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=p(-1)=0\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- $U+V$.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

5) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $P_3[R]$:

$$U=sp\{1+x,x+x^2,1+x^3\}$$
$$V=\{p(x)\in P_3[R] \mid p'(0)=0\}$$

מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

6) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $M_2[R]$

$$U=\left\{\begin{pmatrix} x+3y-5z & x-y+3z \\ -x+7y-15z & 2x+4y-6z \end{pmatrix} \middle| x,y,z\in R\right\}$$

$$W=sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U\cap W$.
ד. אשר את משפט הממד עבור תרגיל זה.

7) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $V=M_2[R]$:

$$U=\{A\in V \mid A=-A^T\} \ , \ W=\left\{A\in V \mid A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=0\right\}$$

א. מצא בסיס וממד ל- U ול- W.
ב. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U\cap W$.
ד. האם $U+W=V$?
ה. האם $U\oplus W=V$?

8) לפניכם שני תת-מרחבים של המרחב $V=M_3[R]$:

$U=\{A\in V \mid A=A^T\}$, $W=\{A\in V \mid$ משולשית עליונה $A\}$

א. מצא בסיס וממד ל- U.
ב. מצא בסיס וממד ל- W.
ג. מצא בסיס וממד ל- $U+W$.
ד. מצא בסיס וממד ל- $U\cap W$.
ה. $U\oplus W=V$

9) יהיו U ו- W שני תת-מרחבים ממימד 2 של R^3.
הוכח כי $\dim(U\cap W)\neq 0$.

10) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 9.
א. הוכח כי $U+W=V$.
ב. חשב $\dim(U\cap W)$.

11) יהי V מרחב וקטורי ממימד 10.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים שונים של V ממימד 7.
מצא את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

12) יהי V מרחב וקטורי ממימד 7.
יהיו U ו- W שני תת-מרחבים של V, כך ש- $\dim U=4,\ \dim W=5$ $(U\not\subseteq W)$.
מצא את המימדים האפשריים של $U\cap W$ ו- $U+W$.

13) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. $\phi\neq A,B\subseteq V$.
נגדיר: $A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$.
הוכח או הפרך:
א. $sp(A+B)=sp(A)\cup sp(B)$
ב. $sp(A\cup B)=sp(A)\cup sp(B)$
ג. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$
ד. $sp(A+B)=sp(A)+sp(B)$
ה. $sp(A\cap B)=sp(A)\cap sp(B)$

14) יהיו U ו- W תת-מרחבים של R^3, המוגדרים על ידי:
$U=\{(a,b,c)\mid a=b=c\},\ W=\{(0,b,c)\}$.
הוכח כי $U\oplus W=R^3$.

15) יהי $V=M_n[R]$.
א. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות הסימטריות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות האנטי-סימטריות.
הוכח כי $U\oplus W=V$.
ב. יהי U תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות העליונות.
יהי W תת-מרחב של V המכיל את כל המטריצות המשולשות התחתונות.
הוכח כי $U\oplus W\neq V$.

תשובות סופיות

1) א. $\dim W = 2$, $B_W = \{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$

$\dim U = 2$, $B_U = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$

$\dim V = 3$, $B_V = \{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$

ב. $\dim(U+V) = 3$ $B_{U+V} = \{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$

ג. $\dim\left(U \cap V\right) = 2$, $B_{U\cap V} = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$

2) א. $\dim U = 2$, $B_U = \{(1, 1, -1, 2), (0, 2, -5, 1)\}$, $\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 0 \\ -3x - y + 2t = 0 \end{cases}$

ב. $\dim V = 3$, $B_V = \{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 1, -2), (0, 0, 2, -5)\}$, $-8x - y + 5z + 2t = 0$

ג. $\dim(U+V) = 4$, $B_{U+V} = \{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

ד. $\dim(U \cap V) = 1$, $B_{U\cap V} = \{(5, 1, 5, 8)\}$ ה. כן. ו. לא.

3) א. $\dim\left(U+V\right) = 4$, $U + V = sp\{1 + x - x^2 + 2x^3, 2x - 5x^2 + x^3, x^2, x^3\}$

ב. $\dim(U \cap V) = 1$, $B_{U\cap V} = \{5 + x + 5x^2 + 8x^3\}$

4) א. $\dim(U+V) = 3$, $B_{U+V} = \{1 + x + x^3, x + x^2 + x^3, x^2 + 2x^3\}$

ב. $\dim(U \cap V) = 1$, $B_{U\cap V} = \{-1 + x^2\}$

5) $\dim(U \cap V) = 2$, $B_{U\cap V} = \{-1 + x^2, 1 + x^3\}$

6) א. $\dim(U) = 2$, $B_U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}\right\}$

$\dim(W) = 3$, $B_W = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}\right\}$

ב. $\dim(U+W) = 4$, $B_{U+W} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

ג. $\dim(U \cap W) = 1$, $B_{U\cap W} = \left\{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\right\}$

ד. ראו בווידאו.

7) א. $\dim W = 2$, $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim U = 1$, $B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

ב. $\dim(U+W) = 3$, $B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$,

ג. $\dim(U \cap W) = 0$, $B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

ד. לא. ה. לא.

8) א.

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim U = 6$

ב.

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim W = 6$

ג.

$$B_{U+W} = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}$$

$\dim(U+W) = 9$

ד. $\dim(U \cap W) = 3$, $B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

ה. לא.

9) הוכחה.

10) א. הוכחה. ב. 8

11) $\dim(U \cap W) = 4, 5, 6 \; or \; 7$, $\dim(U+W) = 8, 9 \; or \; 10$

12) $\dim(U+W) = 6 \; or \; 7$, $\dim(U \cap W) = 2, 3 or 4$

13) הוכחה.

14) הוכחה.

15) הוכחה.

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

2) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1=\{1+x,x,\ x+x^2\}\ ,\quad B_2=\{\ 1+x^2,x+x^2,\ x^2\ \}.$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.
סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

3) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B.
סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E.
סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E.
סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_B^E$.

4) יהי V מרחב וקטורי ויהי B בסיס של V.
הוכח כי הווקטורים $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ בת"ל,
אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות שלהם,
לפי הבסיס B, $\{[u_1],[u_2],...,[u_m]\}$, הם בת"ל.
הסבר כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

תשובות סופיות

1) א. $\left(x,y-x-z,z\right)$ ב. $\left(x,y,z-x-y\right)$ ג. $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $\left[M\right]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

2) א. $\left(a,b-a-c,c\right)$ ב. $\left(a,b,c-a-b\right)$ ג. $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

3) א. $\left(x,y-x,z-y+x,t-z+y-x\right)$ ב. $\left(x,y,z,t\right)$ ג. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

4) שאלת הוכחה.

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות הוכחה

1) יהי V מרחב, ותהי $A=\{v_1,v_2\cdots,v_k\}$ קבוצה; $b\in V$.
הוכיחו כי: $b\in sp(A)\Leftrightarrow sp(A\cup\{b\})=sp(A)$.

2) יהיו u,v,w וקטורים, כך ש-$\{u,v\}$ בלתי-תלויה ליניארית ו-$u\in sp(\{v,w\})$.
א. הוכיחו ש-$w\in sp(\{u,v\})$.
ב. נתון גם כי עבור וקטור נוסף z, הקבוצה $\{u,w,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו שגם הקבוצה $\{u,v,z\}$ בלתי-תלויה ליניארית.

3) יהי U מרחב, תהי $A=\{u_1,u_2\ldots,u_n\}\subseteq U$ ויהיו $u\in U$ וקטור כלשהו.
הוכח כי אם $u\in sp(A)$, וכן $u\notin sp(A-\{u_n\})$, אז $u_n\in sp(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},u)$.

4) יהי V מרחב, $b\in V$ ו-$A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכיחו כי $A\cup\{b\}=\{v_1,v_2\ldots,v_k,b\}$ בת"ל $\Leftrightarrow b\in sp(A)$.

5) יהי V מרחב n מימדי, תהי $A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ ויהי $b\in sp(A)$.
למשוואה $x_1v_1+x_2v_2+\ldots x_kv_k=b$ **אין** פתרון יחיד.
הוכח או הפרך:
א. $k\geq n$
ב. A פורשת את V.
ג. A בהכרח תלויה ליניארית.

6) יהי V מרחב, $b\in V$ ו-$A=\{v_1,v_2\ldots,v_k\}\subseteq V$ בלתי-תלויה ליניארית.
הוכח או הפרך:
א. אם $b\notin sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ב. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא בת"ל.
ג. אם $b\in sp(A)$, אז הקבוצה $B=\{v_1+b,v_2+b,\ldots v_n+b\}$ היא ת"ל.

7) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $v_1,v_2,v_3\in V$.

נסמן: $S=\{v_1,v_2,v_3\},\ \ T=\{av_1+v_2+v_3, v_1+av_2+v_3, v_1+v_2, av_3\}$.

הוכח או הפרך:

א. $spS\subseteq spT$

ב. אם S בלתי תלויה ליניארית ואם $a\neq -2,1$, אז בהכרח $sp(T)=sp(S)$.

ג. $\dim(spT)\leq 2$

ד. $\dim(sp(T))=\dim(sp(S))$

8) יהי V מרחב ותהיינה $A=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\},\ \ B=\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$ קבוצות וקטורים ב- V.

הוכח או הפרך:

א. $sp(A\cup B)=sp(A)+sp(B)$

ב. אם $A\cup B$ בת"ל, אז A,B שתיהן בת"ל.

ג. אם $\dim V=m+k$ וגם A,B שתיהן בת"ל, אז $A\cup B$ בת"ל.

ד. אם $A\cup B$ בת"ל, אז $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

9) יהי V מרחב ויהיו $U,W\subseteq V$ תמר"ים.

תהיינה $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ $\quad A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}\subseteq U,$ שתי קבוצות בת"ל.

הוכח כי אם $U\cap W=\{0\}$, אז $A\cup B$ בת"ל.

10) יהי V מרחב ויהיו U,W תמר"ים שלו.

הוכח כי $U\cup W$ מרחב $\Leftrightarrow$ $W\subseteq U$ או $U\subseteq W$.

לפתרונות המלאים בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

שאלות אמריקאיות

11) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
אז בהכרח מתקיים:
א. מרחב השורות של A^2 מוכל במרחב השורות של A.
ב. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.
ג. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

12) נסמן $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$, $W=Sp\left\{\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}\right\}$
שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$.
אזי בהכרח מתקיים:
א. $U=W$
ב. $\dim U=\dim W$
ג. $U\subseteq W$
ד. אם $U+W=\mathbb{R}^3$, אז $U\cap W=\{0\}$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

13) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 5), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$.
אזי בהכרח מתקיים:
א. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 4.
ב. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 5 פולינומים ממעלה 3.
ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.
ד. A תלויה ליניארית.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

14) במרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל שדה $\mathbb{R}$,

תהי $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה סדורה של 2 וקטורים מ- $\mathbb{R}^2$.

אז מטריצה P המקיימת $[v]_A=Pv$ לכל $v\in\mathbb{R}^2$, שווה ל:

א. $P=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}$

ב. $P=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$

ג. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$

ד. $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\-3&1\end{pmatrix}$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

15) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A,B קבוצות שונות לא ריקות וזרות של וקטורים מ- V. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה ליניארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם $A\cup B$ תלויה לינארית,
אז בהכרח A תלויה לינארית או B תלויה לינארית.

ג. אם A,B בלתי תלויות לינארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

16) אם W תת מרחב של מרחב וקטורי V, אז:

א. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W, וכל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ב. כל בסיס של V מכיל בסיס כלשהו של W, אבל לא כל בסיס של W מוכל בהכרח בבסיס כלשהו של V.

ג. לא כל בסיס של V מכיל בהכרח בסיס כלשהו של W, אבל כל בסיס של W מוכל בבסיס כלשהו של V.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

17) יהיו U,W שני תתי-מרחבים של מרחב V,
כך ש- $\dim V=n,\ \dim U=\dim W=n-1$.
אז:
א. $n-2\le\dim(U\cap W)$
ב. אם $U\ne W$, ייתכן ש- $U\subset W$.
ג. קיים $v\in V$, כך ש- $V=U+sp\{v\}$ ו- $U\cap sp\{v\}=\{0\}$.
ד. אם $U+sp\{v\}=V$ ו- $U\cap sp\{v\}=\{0\}$, אז $v\in W$.

18) נניח כי v_1,v_2,v_3,v_4 הם וקטורים במרחב ליניארי V.
הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם $Span\{v_1,v_2\}\cap Span\{v_3,v_4\}$ והווקטורים v_1,v_2,v_3,v_4 שונים זה מזה,
אז הווקטורים v_1-v_2 ו- v_3-v_4 הם בת"ל.
ב. אם v_1,v_2 בת"ל וגם v_3,v_4 בת"ל, וכן $Span\{v_1,v_2\}\cap Span\{v_3,v_4\}=\{\underline{0}\}$,
אז v_1,v_2,v_3,v_4 הם בת"ל.

19) אם V,W תת מרחבים של מרחב וקטורי U, ומתקיים:
$\dim U=6,\dim V=5,\dim W=3$,
אז $\dim(V\cap W)$ יכול להיות:
א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3
ה. 4
ו. 5

20) V,W תת-מרחבים ממימד 3 של $I\mathbb{R}^7$, $\{w_1,w_2,w_3\}$ בסיס של W ו- $\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V, אז:
א. $\{v_1,w_1,v_2,w_2,v_3,w_3\}$ בלתי תלויה ליניארית.
ב. $\{v_1,w_1,v_2,w_2,v_3,w_3\}$ פורשת את $V+W$.
ג. $\{v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3\}$ בת"ל.
ד. $\{v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3\}$ פורשת את $V+W$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

21) אם A מטריצה **לא** ריבועית, אז בהכרח:

א. מרחב השורות של A^t שווה למרחב השורות של A.

ב. מרחב השורות של A^t שונה ממרחב השורות של A.

ג. ממד מרחב השורות של A^t שווה לממד מרחב השורות של A.

ד. ממד מרחב השורות של A^t שונה מממד מרחב השורות של A.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

22) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר $n\geq 2$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. מרחב השורות של AB מוכל במרחב השורות של A.

ב. אם $AB=0$, אז בהכרח $B=0$ או $A=0$.

ג. אם AB משולשית עליונה, אז בהכרח A משולשית עליונה או B משולשית עליונה.

ד. אם $AB=2I_n$, אז בהכרח $BA=2I_n$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

23) תהי A קבוצה בת 6 פולינומים במרחב $\mathbb{R}_5[x]$ מעל $\mathbb{R}$ (מרחב הפולינומים ממעלה עד וכולל 6), ונניח בנוסף ש- $\mathbb{R}_5[x]=Sp(A)$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 2.

ב. ייתכן ש- A מכילה בדיוק 4 פולינומים ממעלה 1.

ג. שני תת-מרחבים של $\mathbb{R}_5[x]$ מאותו מימד בהכרח שווים.

ד. A בלתי תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

24) יהי a מספר ממשי ויהיו $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}a\\a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\\1\\a\end{pmatrix}\right\},W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\a\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\1\\a\\1\end{pmatrix}\right\}$
שני תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$. בהכרח מתקיים:

א. $U\cap W=\{0\}$ לכל ערכי a.

ב. $U\cap W\neq\{0\}$ לכל ערכי a.

ג. $\dim(U\cap W)=3$ לכל ערכי $a\neq\pm1$.

ד. $\dim(U\cap W)=1$ לכל ערכי $a\neq\pm1$.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

25) נתונות המטריצות $R=\begin{bmatrix}2 & 5 & 5\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$ $T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$.

אז בהכרח מתקיים:

א. $rank(T)=1,\ \ rank(R)=2$

ב. $rank\left(R^3T^5\right)=1$

ג. מרחב השורות של R^3T^5 שווה למרחב השורות של T^5.

ד. $T^{100}=0$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

26) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהי $A=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ קבוצה של וקטורים מ- V $(1\le n)$. נניח בנוסף ש- $\dim(V)=n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם A בלתי תלויה לינארית, אז A פורשת את V.

ב. אם A קבוצה פורשת ל- V, אז A בלתי תלויה לינארית.

ג. ייתכנו מקרים בהם A פורשת את V, אך A תלויה לינארית.

ד. ייתכנו מקרים בהם A בלתי תלויה לינארית, אך A אינה פורשת את V.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

27) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ותהיינה A,B קבוצות שונות לא ריקות של וקטורים מ- V. אז בהכרח מתקיים:

א. אם $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית, אז בהכרח $sp(A)\cap sp(B)=\{0\}$.

ב. אם A,B תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cap B$ תלויה לינארית.

ג. אם A,B בלתי תלויות ליניארית, אז בהכרח $A\cup B$ בלתי תלויה לינארית.

ד. אם $sp(A)\cup sp(B)=sp(A\cup B)$, אז בהכרח $A\cup B$ תלויה לינארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

28) וקטור הקואורדינטות של הפולינום $2x^3+12x^2-x+11$,
ביחס לבסיס $\{2x^3+3x^2+2,\ x+1,\ x^3+x^2,\ 2x^2+2\}$, הוא:

א. $(2,2,-2,4)$

ב. $(4,-2,-1,2)$

ג. $(2,-1,-2,4)$

ד. $(4,-1,2,2)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

29) תהי A מטריצה כלשהי. אזי בהכרח:
א. אם שורות A בת"ל, אזי עמודות A בת"ל.
ב. אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה ריבועית.
ג. אם שורות A בת"ל ועמודות A בת"ל, אזי בהכרח A מטריצה הפיכה.
ד. אם שורות A בת"ל, אזי בהכרח למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

30) נתונים תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$:

$$U=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a+b+c=d\}$$

$$W=sp\{(1,0,1,1),(0,2,1,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0)\}$$

א. מצאו בסיס וממד עבור $U,\ W,\ U\cap W$.
ב. עבור תת מרחבים K,L של מרחב וקטורי V, הגדירו את $K+L$.

31) A מטריצה **לא** ריבועית, כך שלמערכת המשוואות ההומוגנית $Ax=0$ פתרון יחיד, אז:
א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ ללא פתרון.
א. יש מערכת לא הומוגנית $Ax=b$ עם יותר מפתרון אחד.
ב. יש מערכת לא הומוגנית $A^t y=c$ ללא פתרון.
ג. יש מערכת לא הומוגנית $A^t y=c$ עם יותר מפתרון אחד.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

32) תהי A מטריצה ממשית **לא ריבועית** מסדר $m\times n$. אזי בהכרח מתקיים:
א. אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$, אז בהכרח $m<n$.
ב. ייתכן ש- $A^tA=I_m$ וגם $AA^t=I_n$.
ג. אם $rank(A)=m$, אז למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות.
ד. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

33) נתונות מטריצות ממשיות A מסדר 2×4 ו- B מסדר 4×4,
כך ש- $rank(B)=3$, $rank(A)=2$.
הוכיחו כי $AB\neq 0$.

34) תהי A מטריצה ממשית מגודל $m\times n$, כאשר $m<n$.
נסמן ב- A^T את המטריצה המוחלפת. בהכרח ש:
א. מימד מרחב הפתרונות של המערכת $AX=0$ הוא $n-m$.
ב. למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש אינסוף פתרונות.
ג. ייתכן מצב בו למערכת $\left(A^TA\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ד. ייתכן מצב בו למערכת $\left(AA^T\right)x=0$ יש פתרון יחיד.
ה. אף תשובה אינה נכונה.

35) A מטריצה 3×3, כך ש- $A^2=0$ אבל $A\neq 0$, אז הדרגה של A יכולה להיות:
א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3
ה. אף תשובה אינה נכונה.

36) תהיינה A מטריצה מסדר 3×5 ו- B מטריצה 5×3 אז:
א. AB הפיכה אם ורק אם BA הפיכה.
ב. AB בהכרח לא הפיכה.
ג. BA בהכרח הפיכה.
ד. אם $AB=0$, אז $rank\left(A\right)+rank\left(B\right)\leq 5$.

37) אם A מטריצה, כך שלמערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד,
אז בהכרח:
א. A הפיכה.
ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים A^t פתרון יחיד.
ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים A פתרון יחיד.
ד. מרחב העמודות של A שונה ממרחב הפתרונות של A.

38) תהי A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$, אזי בהכרח מתקיים:
א. עבור $m=n$, אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$,
אז בהכרח למערכת $A^tx=b$, יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$.
ב. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח $m<n$.
ג. ייתכן ש- $A^tA=I_n$ וגם $AA^t=I_m$.
ד. אף תשובה אינה נכונה.

39) נתון כי $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$ הפיכה.

אז בהכרח:

א. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y=\alpha_{13}\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y=\alpha_{23}\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y=\alpha_{33}\end{matrix}$ פתרון יחיד.

ב. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+w=0\\ \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z-4w=1\\ \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z+3w=-4\end{matrix}$ אינסוף פתרונות.

ג. למערכת $\begin{matrix}\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z=3\\ \alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z=1\\ \alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z=1\end{matrix}$ אין פתרון.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

תשובות סופיות

11) א	12) ב	13) א	14) ד
15) א+ד	16) ג	17) א+ג	18) הוכחה.
19) ג+ד	20) ב	21) ב+ג	22) ד
23) ה	24) ב+ד	25) ב+ג	26) א+ב
27) א	28) ג	29) ג	

30)

$$B_U=\{(-1,1,00),(-1,010),(1,001)\}$$
$$B_W=\{(100-1),(010-1),(0012)\}$$
$$U\cap W=sp\{(1,0,2,3),(0,1,2,3)\}$$
$$\dim U=3,\qquad \dim W=3,\qquad \dim(U\cap W)=2$$

31) ד	32) א+ב+ג	33) הוכחה.
34) ב+ד	35) ב	36) ד
37) ד	38) א+ג	39) ב