

מבוא למשוואות דיפרנציאליות

פרק 3 - משוואות ליניאריות מסדר n

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה מסדר שלישי.....1
2. משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים.....2
3. שיטת השוואת מקדמים.....5
4. שיטת וריאציית הפרמטרים.....7
5. משוואת אוילר מסדר שלישי (ללא ספר).....7
6. הוורונסקיאן ושימושיו.....8
7. השיטה האופרטורית.....9

משוואה חסרה מסדר שלישי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(1) \quad y' y''' - (y'')^2 - 3y''(y')^2 - 4(y')^4 = -16y(y')^3$$

עם תנאי ההתחלה : $y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = -12$.

$$(2) \quad \begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y'' y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y'' y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = -1, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} 3y''' y - y' y'' &= 0 \\ y(1) &= 1, y'(1) = 3, y''(1) = 6 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} (y' y''' - 2(y'')^2) y^2 &= -(y')^4 \\ y &> 0 \\ y(1) &= y'(1) = y''(1) = 1 \end{aligned}$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \frac{1}{4} \ln |-3 + 4y| = x + \frac{1}{4} \ln 3$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$(3) \quad y = \tan x - 1$$

$$(4) \quad y = x^3$$

$$(5) \quad y = e^{x-1}$$

משוואות לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-15 :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13)$$

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y'''' - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = -19 \\ y'''(0) = -47 \end{cases} \quad (15)$$

16 נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6,

אשר אחד הפתרונות שלה הוא $x^2 e^x \cos 2x$.

א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב. מצא את המשוואה.

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$y'''' - 6y''' + 27y'' - 68y' + 135y - 150y' + 125y = 0 \quad \text{ב.}$$

שיטת השוואת מקדמים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2\sin x - 4\cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$

שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x + 1 - \ln(e^x + 1)) + e^x (-\ln(e^x + 1)) + e^{2x} \left(-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln |x| \quad (3)$$

הוורונסקיאן ושימושי

שאלות

- (1) האם קיימת מד"ר מהצורה $y'''' + p(x)y''' + q(x)y'' + r(x)y' = 0$, בעלת מקדמים רציפים בקטע $[-1,1]$, כך שהפונקציות $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$ הן פתרונות שלה?
- (2) נתונות הפונקציות: $y_1(x) = 4 - x$, $y_2(x) = 4 + x$, $y_3(x) = 20 + x$.
 א. חשב את הוורונסקיאן של הפונקציות.
 ב. קבע האם הפונקציות תלויות בקטע $(-\infty, \infty)$.
 ג. ענה שוב על סעיף ב', בידיעה ששלוש הפונקציות הן פתרון של המד"ר $y'' = 0$.
- (3) פתור את הסעיפים הבאים:
 א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמים בקטע I , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I . הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע I , כך ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ הם פתרונות שלה.
 ב. רשום משוואה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$ הן פתרונות שלה.

תשובות סופיות

- (1) לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודה אחת $x = 0$.
 (2) א. $W = 0$. ב. הפונקציות תלויות. ג. הפונקציות תלויות.
 (3) א. שאלת הוכחה. ב. $y'''' - \frac{3}{x}y''' + \frac{6}{x^2}y'' - \frac{6}{x^3}y' = 0$, $x \neq 0$.

השיטה האופרטורית

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 4e^x - 10e^{-2x} \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 10e^{4x} + 2e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 10e^x + 4e^{2x} \quad (3)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = 24e^x + 81e^{4x} \quad (4)$$

$$(D^6 + D^4 + D^2)y = 104\sin(2x+1) + \cos(x+10) \quad (5)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = -5\sin 2x \quad (6)$$

$$(D^4 - 3D^3 + 6D^2 - 12D + 8)y = 30\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 48\cos^2 x - 16 \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} - e^x + e^{-2x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + \frac{5}{81} e^{4x} - \frac{1}{18} x e^x - \frac{1}{30} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x} + 5x^2 e^x + 2x^2 e^{2x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} - \frac{1}{3} x^4 e^x + x e^{4x} \quad (4)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{3x} + c_6 e^{-3x} - 2\sin(2x+1) - \cos(x+10) \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x + c_5 e^{4x} + \frac{1}{500} [4\sin 2x - 22\cos 2x] \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + \frac{5\sin x + 25\cos x}{26} + \frac{-3\cos 2x - 18\sin 2x}{37} + 1 \quad (7)$$