

משוואות דיפרנציאליות 1א

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים 1
3. משוואה הומוגנית 3
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$ 5
5. משוואה מדויקת 6
6. גורם אינטגרציה 8
7. משוואה לינארית מסדר ראשון 11
8. משוואת ברנולי 13
9. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד 14
10. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון 17

הפרדת משתנים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 \quad ; \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 \quad ; \quad y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משוואה הומוגנית

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 : \text{נתונה המשוואה} \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

משוואה מהצורה $(ax + by + c)dx + (dx + ey + f)dy = 0$

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x + y + 2} \quad (1)$$

$$(x + 2y + 3)dx + (2x + 4y - 1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3 + x + 2y}{1 + x + y} \quad (4)$$

$$(2x + y - 3)dx + (x + y - 1)dy = 0 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x + y + 1) + \frac{1}{4}\ln(2(x + y + 1) + 1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y + 2}{x - 1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y + 2}{x - 1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x + 2y + 3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x - 1| = \frac{1}{4}\left[-(2 + \sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} - 2\frac{y + 2}{x - 1}\right| + (-2 + \sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2} + 2\frac{y + 2}{x - 1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5x - 2} - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5x - 2} + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x - 2| = \frac{1}{2}\ln\left(2 + 2\frac{y + 1}{x - 2} + \left(\frac{y + 1}{x - 2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

משוואה מדויקת

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות 1-6:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{-xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{-xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } (3x^2 + ye^{-xy})dx + (2y^3 + kxe^{-xy})dy = 0, \text{ כאשר } k \text{ קבוע.}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k , על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

שאלות

(1) הראה שהמשוואה $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

(2) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$ אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

(3) הראה שהמשוואה $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$ אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x .

פתור את המשוואות בשאלות 4-9:

(4) $(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0$

(5) $(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0$

(6) $(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0$

(7) $(y^2 - y)dx + xdy = 0$

(8) $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

(9) $y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$

$$(10) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה מד"ר לא מדויקת}$$

א. הוכח: אם $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכח: אם $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

$$(11) \quad (y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד. כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

$$(12) \quad (5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה}$$

מצא את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

$$(13) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

$$(14) \quad (x^2 y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$. כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

$$(15) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

א. מצא תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזר בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$.

$$(16) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ נתונה המשוואה הדיפרנציאלית}$$

מצא תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

שאלת הוכחה. (10)

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב.} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

משוואות ברנולי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

(1) נתונה הבעיה $y(2) = -1$, $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$.

- א. הוכח ש- $y_1(x) = -x + 1$, $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.
 קבע באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.
 ב. הסבר מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

(2) נתונה הבעיה $y(0) = 0$, $y' = \sqrt[3]{y} + 4$.

- א. הוכח שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.
 ב. הוכח שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.
 ג. הוכח שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצא אותו.

(3) פתור את הבעיה $y(4) = 0$, $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$.

(4) נתונה הבעיה $y(0) = 4$, $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$.

- א. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.
 ב. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

(5) נתונה המד"ר $ydx = (2x + y^3)dy$.

- א. הראו שעבור $x = x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון, ופתרו אותה ככזאת.
 ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית, מהן נקודות ההתחלה (x_0, y_0) , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד, העובר דרך (x_0, y_0) .
 צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
 מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0, y_0) ?

$$(6) \quad \begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו 3 קרובי פיקארד לפתרון הבעיה.
 ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).
 ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \rightarrow \infty$.

$$(7) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases} \quad \text{כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה? } (x > 0)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית התחלה:}$$

- א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.
 ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.
 ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(9) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית התחלה:}$$

- א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.
 ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.
 ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(10) \quad \begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(11) \quad \begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(12) \quad \begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

תשובות סופיות

- (1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר. ג. שאלת הוכחה.
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- (3) $y(x) = 0$
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
ב. כל נקודת התחלה (x_0, y_0) , שעבורה $y_0 \neq 0$.
הקטע הארוך ביותר: $(0, \infty)$ או $(-\infty, 0)$.
- (6) א. $y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 + x^2, y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$
ב. $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$. ג. הוכחה.
- (7) אחד.
- (8) א. $[-0.08, 0.08]$ ב. $[-0.1, 0.1]$ ג. הוכחה.
- (9) א. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5, 0.5]$ ג. הוכחה.
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

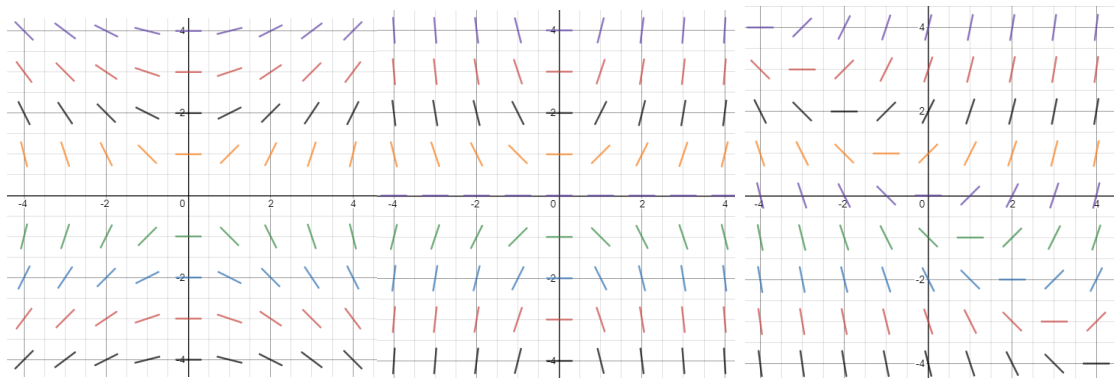
(1) שרטט שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y' = 2y - x$.

(2) התאם כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א. $y' = \frac{x}{y}$

ב. $y' = xy$

ג. $y' = x + y$



איור 3

איור 2

איור 1

(3) נתונה המד"ר: $y' = y - x$, $y(0) = 2$.

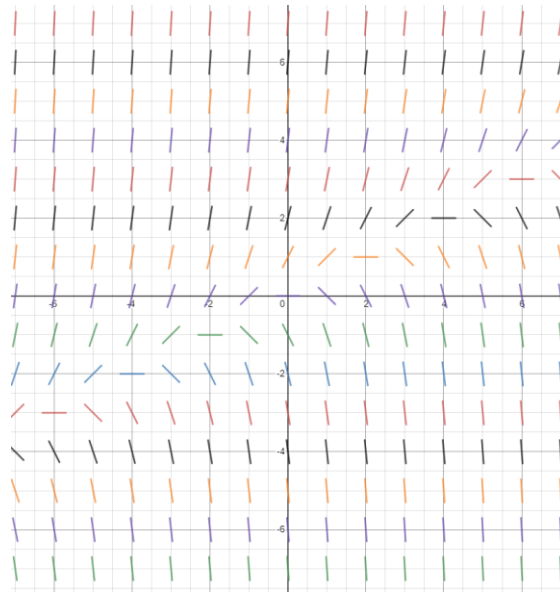
מצא בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.1$.

(4) נתונה המד"ר: $y' = x + y$, $y(1) = 2$.

מצא בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.2$.

תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3) $y(1) = 4.593$

(4) $y(2) = 6.95328$