חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 16 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

הפרדת משתנים

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$ $\quad (y\neq 0)$

2) $(1-x)y'=y^2$

3) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

4) $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y \quad ; \quad y(2)=1$

5) $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9 \quad ; \quad y(1)=-1$

6) $(x^2y-2+2x^2-y)dx-(xy^2-4-4x+y^2)dy=0$

7) $dy=2t(y^2+4)dt$

8) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

9) $y'+y^2\sin x=0 \quad ; \quad y(\pi)=1$

10) $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x \quad ; \quad y(0)=5 \qquad (\cos x\neq 0)$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad y(0)=1$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

2) $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

3) $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

4) $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

5) $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

6) $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

7) $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

8) $x=1+\tan(t+c)$

9) $y=-\frac{1}{\cos x}$

10) $\ln|y|=\tan x+\ln 5$

11) $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

משוואה הומוגנית

שאלות

פתור את המשוואות בשאלות **1-8**:

1) $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

2) $y'=\dfrac{4y-3x}{2x-y}$

3) $y^2+x^2y'=xyy'$

4) $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

5) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$

6) $y'=\dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0\ \ ;\ \ y(1)=0$

8) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

9) נתונה המשוואה: $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות

1) $-\ln|x|=\frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right|+c\ ,\qquad y=-\frac{x}{2^{1/3}}$

2) $\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|(y/x)-1\right|-\frac{5}{4}\ln\left|(y/x)+3\right|+c\ ,\quad y=x,\ \ y=-3x$

3) $-\ln|x|=\ln\left|(y/x)\right|-(y/x)+c,\quad y=0$

4) $-\ln|x|=\frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right|+c,\quad y=0,\quad y=-2x$

5) $\ln|x|=-\sin(y/x)+c$

6) $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right)=\ln|y|+c,\qquad y=0$

7) $\ln x=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+c$

8) $\ln|t|=-\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right|+c,\quad x(t)=0,\quad x(t)=t$

9) $n=1,\quad \ln|x|=-\frac{1}{4}\ln\left(1+2(y/x)^2\right)+c$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

2) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

3) $(x-2)y'=y+2(x-2)^3 \quad (x>2)$

4) $x^3y'+(2-3x^2)y=x^3 \quad (x>0)$

5) $\frac{dy}{dt}+y=2+2t \quad ; \quad y(0)=1$

6) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x} \quad (\sin x>0)$

7) $y'-2y\cot x=1 \quad (\sin x>0)$

8) $x^2z'+2xz=\cos x \quad ; \quad z(\pi)=0$

9) $ydx=(2x+y^3)dy$

תשובות סופיות

1) $y=2+C\cdot e^{-x^2}$

2) $y=x\left[\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+C\right]$

3) $y=(x-2)\left[x^2-4x+C\right]$

4) $y=\frac{1}{2}x^3+C\cdot x^3e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y=2t+e^{-t}$

6) $y=\frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x}+C\right]$

7) $y=\sin^2 x\left[-\cot x+C\right]$

8) $z=\frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y)=y^2(y+c)$

משוואת ברנולי

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x^2y'+2xy-y^3=0$

2) $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

3) $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

4) $y'-\left(\dfrac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

5) $z'-\cot x\cdot z=\dfrac{1}{\sin x}z^3 \qquad (\sin x\neq 0)$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

2) $y=\dfrac{x^2+1}{-x+C}$

3) $y=x^2\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2$

4) $y=\dfrac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

5) $z=\pm\sqrt{\dfrac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y'=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y}\ ,\ y(2)=-1$.

א. הוכח ש- $y_1(x)=-x+1,\quad y_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.
קבע באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבר מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y'=\sqrt[3]{y}+4\ ,\ y(0)=0$.

א. הוכח שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכח שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכח שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצא אותו.

3) פתור את הבעיה $y'=\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+x^2\sin y\ ,\ y(4)=0$.

4) נתונה הבעיה $y'=(y-1)\left(x^2+y\right)^5\ ,\ y(0)=4$.

א. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $ydx=\left(2x+y^3\right)dy$.

א. הראו שעבור $x=x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,
ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,
מהן נקודות ההתחלה (x_0,y_0), כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,
העובר דרך (x_0,y_0).
צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0,y_0)?

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y'=2xy \\ y(0)=1 \end{cases}$.

א. מצאו 3 קרובי פיקארד לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \to \infty$.

7) כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה $\begin{cases} y'=\frac{1}{x}|\sin y| \\ y(1)=\pi \end{cases}$ $(x>0)$?

8) נתונה בעיית התחלה: $\begin{cases} y'=5+5y^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$.

א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלה: $\begin{cases} y'=-\frac{x}{y} \quad (y>0) \\ y(0)=1 \end{cases}$.

א. מצא קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצא את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראה, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שמצאת בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y'=x+\sin y \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y'=x\cdot\sin xy \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y'=xye^{-y^2} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

3) $y(x)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.

ב. כל נקודת התחלה (x_0, y_0), שעבורה $y_0 \neq 0$.

הקטע הארוך ביותר: $(0,\infty)$ או $(-\infty,0)$.

6) א. $y_0(x)=1, \quad y_1(x)=1+x^2, \quad y_2(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}, \quad y_3(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$

ב. $y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+...+\frac{x^{2n}}{n!}$ ג. הוכחה.

7) אחד.

8) א. $[-0.08, 0.08]$ ב. $[-0.1, 0.1]$ ג. הוכחה.

9) א. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5, 0.5]$ ג. הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

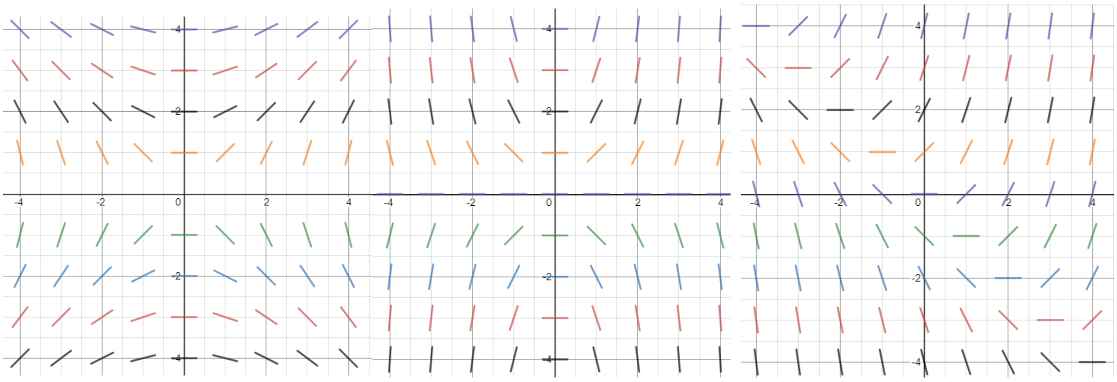
1) שרטט שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y'=2y-x$.

2) התאם כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א׳-ג׳ לשדה הכיוונים שלה:

א. $y'=\frac{x}{y}$

ב. $y'=xy$

ג. $y'=x+y$



איור 3 איור 2 איור 1

3) נתונה המד״ר: $y'=y-x\ ,\ y(0)=2$.

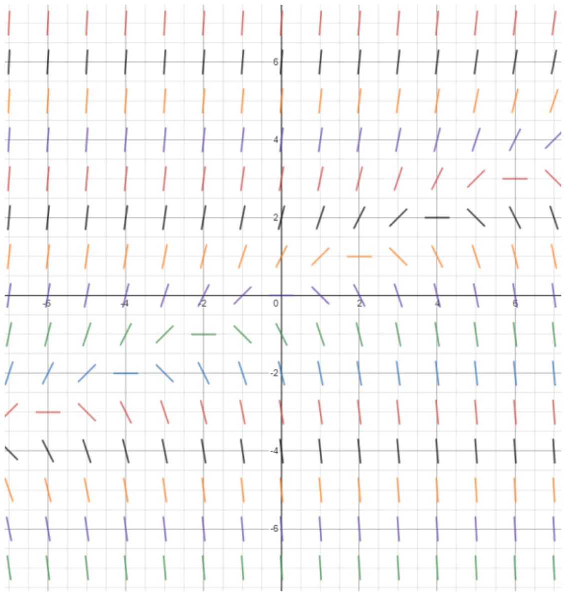
מצא בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.1$.

4) נתונה המד״ר: $y'=x+y\ ,\ y(1)=2$.

מצא בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.2$.

תשובות סופיות

1)



2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

3) $y(1)=4.593$

4) $y(2)=6.95328$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדוק עם מרצה הקורס אם אתה נדרש אליו.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $4x^2p^2 - 4x^2p - 2xy - y^2 = 0 \qquad (p = y')$

2) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \qquad (p = y')$

3) $xyp^2 + \left(x^2 + xy + y^2\right)p + x^2 + xy = 0 \qquad (p = y')$

4) $y = 2px + p^4x^2 \qquad (p = y')$

5) $xp^2 - 2yp + 4x = 0 \qquad (p = y')$

6) $6p^2y^2 + 3px - y = 0 \qquad (y > 0) \qquad (p = y')$

תשובות סופיות

1) $$\left(y-2x-\sqrt{x}\cdot c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|x|-c_2\right)=0$$

2) $$\left(\ln|y|-2\ln|x|-c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+3\ln|x|-c_2\right)=0$$

3) $$\left(y+0.5x-\frac{c_1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-c_2\right)=0,\quad x>0$$

4) $$y=\pm 2\sqrt{cx}+c^2$$

5) $$y=\frac{1}{2}cx^2+\frac{2}{c}$$

6) $$6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2+3\left(\frac{c}{y^2}\right)x-y=0$$